Van Pythagoras tot Euclides

Van bewijzen om te bekijken naar bewijzen om over na te denken

Jean Paul Van Bendegem

– "Ben je daar wel zeker van?"
– "Jawel, want het is aangetoond met wiskundige zekerheid!"

Af en toe zal eenieder van ons een dergelijk kort gesprek meegemaakt hebben. Aan de ene kant lijkt de zaak vrij onschuldig. Je hebt nu eenmaal verschillende manieren om iets aan te tonen: het kan plausibel zijn, redelijk klinken, aannemelijk zijn, het kan wetenschappelijk onderbouwd zijn, al dan niet met tabellen en figuren, het kan logisch zeer sterk samenhangend zijn en het kan ook met wiskundige zekerheid gebeuren. Dit alles varieert van nauwelijks overtuigend tot absoluut betrouwbaar. Aan de andere kant evenwel volstaat het de vraag te stellen waar die mathematische zekerheid vandaan komt en waarop die gebaseerd is. Daarbij aansluitend is de vervolgvraag evident hoe ze eruit ziet. Hierop, vermoed ik, zal het antwoord snel komen: het wiskundig bewijs. De vragen komen nu in sneltempo: hoe ziet een wiskundig bewijs eruit? Waarom wordt het verondersteld zo overtuigend te zijn? Is er zoiets denkbaar als een geschiedenis van het wiskundig bewijs? Zouden er bewijzen kunnen zijn die vroeger overtuigend waren maar dat nu niet meer zijn?

Om een aanzet te kunnen geven tot antwoorden op deze vragen, is het noodzakelijk om terug te keren in de tijd. Meer bepaald moeten we onze blik richten naar de periode in de Griekse geschiedenis waarin het idee van het wiskundig bewijs tot bloei komt en een eerste merkwaardige transformatie ondergaat die tot op vandaag nog steeds cruciaal is, waarmee de hedendaagse relevantie meteen ook aangetoond zal zijn. Om wat preciezer te zijn, verwijs ik hier naar de periode waarin 'wiskundigen' zoals Pythagoras (ca. 570 – ca. 490) en Euclides (ca. 325 – ca. 265) actief waren. Ik voeg er meteen aan toe dat het niet mijn bedoeling is om een historische detailstudie te presenteren. Ten eerste is mijn historische kennis te ontoereikend, ten tweede is er een probleem met het gebrek aan rechtstreekse bronnen, zeker voor Pythagoras[1] en,

[1] Een schitterende manier om met leven en werk van Pythagoras kennis te maken is het lemma van Carl Huffman in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2011).

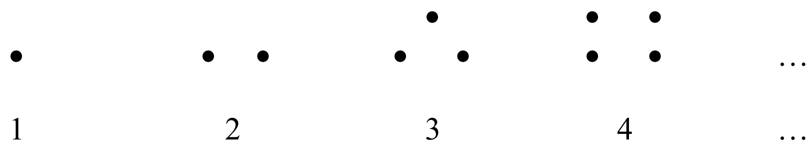
ten derde, is er het probleem van een sterke mythevorming, opnieuw kenmerkend voor Pythagoras[2], die de duisternis alleen maar groter maakt. Wel is het mijn bedoeling om de opkomst en de ontwikkeling van het wiskundig bewijs te begrijpen. Uiteraard kan dit niet uitgewerkt worden zonder een minimale aandacht voor de geschiedenis maar, zeker als we het hebben over Pythagoras, dient ongeveer elke zin de kwalificatie mee te krijgen 'voor zover we weten'. Met deze waarschuwing in het achterhoofd is het mijn bedoeling de lezer het volgende te presenteren.

In een eerste deel wordt de opkomst van het wiskundig bewijs bondig weergegeven als een vorm van 'kijken'. Er hoeft niet zozeer een tekst uitgeschreven te worden, het volstaat een figuur (mentaal) te analyseren om meteen overtuigd te worden van de juistheid van wat er over de figuur wordt beweerd. Deze werkwijze is typisch verbonden (maar niet exclusief) met de figuur van Pythagoras. De transformatie waarover de volgende sectie zal handelen is de overgang van het bewijs door te 'kijken' naar het bewijs dat toelaat om over het onmogelijke te redeneren, het zogenaamde "bewijs uit het ongerijmde" of het *reductio ad absurdum*. Wat er zo bijzonder is aan deze overgang is dat er bij deze nieuwe bewijsvorm in principe geen sprake meer kan zijn van 'kijken' (hoewel ik dit later zal nuanceren) omdat er, strikt genomen, geen voorstelling meer mogelijk is. Hier worden dus werkelijk bewijzen geformuleerd die moeten 'gedacht' worden. In een afrondende paragraaf, gevolgd door het besluit van deze tekst, wil ik nog even ingaan op de vraag naar de hedendaagse relevantie van deze ontwikkeling, niet alleen voor de wiskunde maar ook voor de bredere, intellectuele cultuur.

Bewijzen door te 'kijken' of de Pythagoreïsche benadering

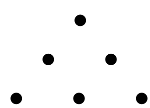
Hoewel we zoals gezegd niet zo veel met voldoende zekerheid weten over Pythagoras – er zijn geen directe bronnen en de eerste indirecte bronnen dateren van een flinke tijd later, met name in de werken van Plato en Aristoteles –, kunnen we wel vrij zeker zijn van het feit dat de rekenkunde, het werken en rekenen met getallen, op een meetkundige wijze werd geïnterpreteerd. Getallen werden neergeschreven in de vorm van geometrische patronen:

2 Vermeldenswaard is dat soms wordt beweerd dat Pythagoras wonderen kon verrichten en na zijn dood ten hemel werd opgenomen. Zie ook hiervoor Huffman (2011).

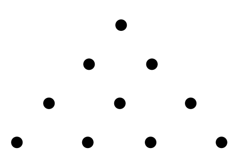


Dit heeft een belangrijk gevolg. Getallen worden niet alleen gezien als een uitdrukking van een aantal – er staan *twee* koppen op tafel – maar ook als een geometrisch patroon. Meer bepaald had de wijze waarop de punten worden gerangschikt ook een betekenis. Het getal 3 wordt in een driehoekige vorm gepresenteerd en niet als bijvoorbeeld drie punten op een rij. Hoewel ik hieraan in het verdere verloop van deze tekst niet zoveel aandacht zal besteden, dient opgemerkt te worden dat de wiskundige entiteiten en concepten niet 'neutraal' worden geïnterpreteerd, maar geplaatst worden in een complex netwerk van wiskundig-symbolische elementen.

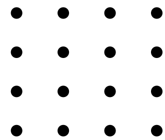
Een paar voorbeelden ter verduidelijking. Het getal 2 werd geassocieerd met de vrouw, het getal 3 met de man en het product van deze twee getallen is $2 \times 3 = 6$, het getal van het huwelijk. De geometrische voorstelling van het getal 6 was dan ook niet toevallig een gelijkzijdige driehoek:



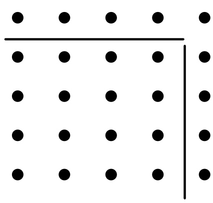
Wordt hieraan nog een laag toegevoegd, dan krijgen we het getal van de perfectie, want $10 = 1 + 2 + 3 + 4$:

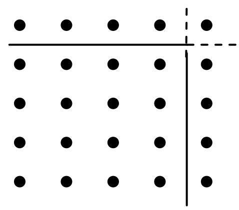


Hiermee is nog niks gezegd over het redeneren met deze voorstellingen. Laat ik starten met een voorbeeld om de werkwijze te illustreren en vervolgens toe te lichten. Naast de driehoeksgetallen zijn de meest bekende voorstellingen de vierkantsgetallen. Neem bijvoorbeeld het getal 16, voorgesteld als vierkantsgetal:



Voeg nu bovenaan en aan de rechterzijde het nodige aantal punten toe om het volgende vierkantsgetal te bekomen. Dat levert de figuur links op.





Hoeveel punten hebben we moeten toevoegen? In de figuur aan de rechterkant is duidelijk te zien dat we bovenaan één rij hebben toegevoegd met zoveel punten als de zijde van het oorspronkelijke vierkant, dat we aan de rechterkant een kolom hebben toegevoegd met datzelfde aantal en ten slotte één extrapunt in de hoek rechtsboven. In getallen uitgeschreven betekent dit dat:

$$5 \times 5 = (4 \times 4) + 4 + 4 + 1,$$

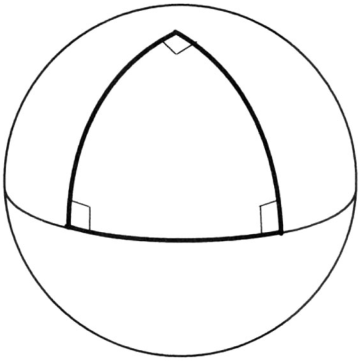
of $\quad 5^2 = 4^2 + (2 \times 4) + 1$, en aangezien $5 = 4 + 1$,

of $\quad (4 + 1)^2 = 4^2 + (2 \times 4) + 1.$

De belangrijkste stap – en hierover bestaat heel wat discussie – bestaat er nu uit te beseffen dat de specifieke getallen 4 en 5 geen speciale rol te vervullen hebben. Anders gezegd, we ‘zien’ dat, was ons een vierkant gegeven met n punten als zijde en we voegen bovenaan een rij n punten toe en aan de rechterzijde een kolom met n punten toe en we sluiten het geheel af met één punt in de rechterbovenhoek, we precies hetzelfde verband zullen bekomen maar met 4 vervangen door n:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2 \times n + 1$$

Het resultaat is een gekende algebraïsche identiteit.

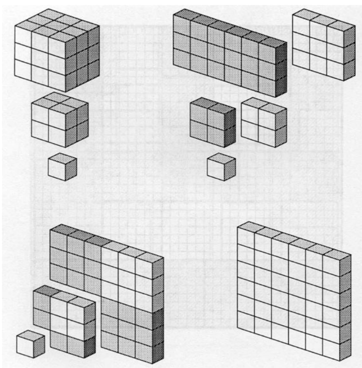


Ik heb heel bewust in de vorige paragraaf het werkwoord 'zien' tussen aanhalingstekens geplaatst. Het is zeker niet zo dat we uit de figuur rechtstreeks aflezen dat de algemene formule het geval is. De tekening ging wel degelijk enkel en alleen over 4 en 5, niet over n en n + 1. De veralgemening brengt met zich een 'veralgemeende' figuur mee, maar het is alles behalve duidelijk hoe we inzien dat wat geldt voor het specifieke geval ook moet gelden voor het algemene geval. Anders gezegd, er komt wel degelijk een redeneerproces aan te pas om die overgang te kunnen realiseren. We zien, zoals filosofen het zo mooi kunnen uitdrukken, het algemene doorheen het specifieke. Dit is uitermate belangrijk omdat niet altijd verzekerd is dat de veralgemening lukt. Laat ik een geografisch voorbeeld geven. Indien een persoon aan het strand met een stok in het zand een driehoek tekent, dan zal de som van de hoeken van die driehoek 180 graden zijn, zoals we allemaal geleerd hebben in de vlakke klassieke meetkunde. Maar stel dat de persoon in kwestie ambitieus wordt en steeds grotere driehoeken tekent op het aardoppervlak en uiteindelijk een driehoek tekent waarvan de top op de Noordpool ligt en een zijde op de evenaar die loopt van 0 tot 90 graden, dan hebben we een driehoek waarvan de som van de hoeken niet 180, maar 270 graden is, vermits elke hoek een rechte hoek is van 90 graden, zoals op de figuur te zien is.

We maken dus impliciet een aantal veronderstellingen die de veralgemening mogelijk moeten maken. Dit is alles behalve triviaal omdat er eigenschappen zijn van de figuur die weinig belang hebben – of de punten worden voorgesteld door kleine cirkeltjes, kleine vierkantjes of een andere figuur maakt echt niet uit – en eigenschappen die cruciaal zijn, zoals de vorm van het vierkant. We moeten dus een onderscheid kunnen maken tussen cruciale, essentiële, bepalende elementen van de figuur enerzijds, en verwaarloosbare details anderzijds. De figuur zelf maakt dit echter niet duidelijk, en dus moet het wel een denkproces zijn dat ons deze inzichten levert. De Engelse uitdrukking *proofs by looking* voor dergelijke bewijzen vat de situatie zeer mooi samen: het inspecteren van de figuur is niet het bewijs maar het bewijs komt tot stand doorheen de inspectie.

Wat echter voor mijn betoog relevant is, is dat er een figuur getekend kan worden die als basis van het redeneerproces dienst doet. Er is iets wat je kunt manipuleren, bekijken, bestuderen, waarop procedures en bewerkingen uitgevoerd kunnen worden. Bovendien is het een bijzonder krachtige methode. Het is verrassend zonder meer hoeveel wiskunde op deze wijze kan bekomen worden[3]. Ik beperk mij tot twee schitterende voorbeelden. Het eerste is deze figuur die de volgende wiskundige bewering 'aantoont':

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$



De som van de derde machten van de eerste n getallen is gelijk aan de som van deze getallen in het kwadraat. We starten op de figuur links bovenaan. Daar staan 1, 2 en 3 tot de derde macht want we zien drie kubussen met zijde 1, 2 en 3 en die bestaan uit, respectievelijk, 1, 8 en 27 blokjes. In de figuur rechtsboven worden de kubussen uit elkaar gehaald en twee stukken van de kubus met zijde 3 worden aan elkaar gehecht. Bemerk dat we nu alleen maar figuren overhouden met een dikte van één blokje. In de figuur links onder worden alle deelfiguren herschikt om een vierkant te vormen, wat het eindresultaat rechtsonder oplevert. Wat is de zijde van dit vierkant? De figuur linksonder geeft het antwoord: 1 + 2 + 3. En, aangezien het om een vierkant gaat, is het totaal aantal blokjes gelijk aan $(1 + 2 + 3)^2$. De oorspronkelijke drie kubussen met een totaal blokjes gelijk aan 1 + 8 + 27 = 36 is omgevormd tot een vierkant met zijde 1 + 2 + 3 = 6 met een totaal aantal blokjes eveneens gelijk aan 36.

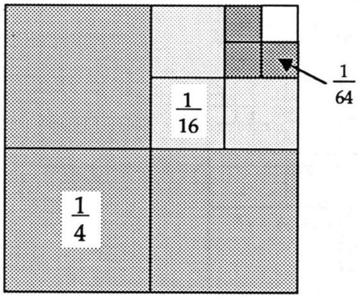
Het tweede voorbeeld zoekt het antwoord op de vraag wat de som is van:

$$1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \ldots = ?$$

of, anders geformuleerd:

$$1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + 1/4^4 + \ldots = ?$$

3 Zie (Becker 1965: 125-145) voor een mooie illustratie van de sterkte van deze methode. Ik geef één voorbeeld voor de wiskundig enthousiasten onder de lezers. Een perfect getal n heeft de eigenschap dat het getal gelijk is aan de som van zijn delers, het getal zelf niet meegerekend. Het eerste perfect getal is 6, want 6 = 1 + 2 + 3. Het volgende perfect getal is 28, want 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. De algemene vorm van een even perfect getal is bekend, namelijk $2^{p-1}.(2^p - 1)$, op voorwaarde dat p en $2^p - 1$ priemgetallen zijn. Dat een even perfect getal die vorm heeft, kan door bewijzen door te 'kijken' aangetoond worden, wat toch een indrukwekkend resultaat is. Terzijde: het is nog steeds een open wiskundig vraagstuk of er *oneven* perfecte getallen bestaan!



De figuur stelt een vierkant voor met zijde 1. De hoofdindeling is in 4 vierkanten met elk een oppervlakte van 1/4. 3 van de 4 vierkanten laten we staan, maar met het overblijvende, in de rechterbovenhoek, doen we dezelfde bewerking. We delen het in 4, de oppervlakte is nu 1/4 van 1/4, zijnde 1/16. Deze procedure blijven we herhalen tot in het oneindige om te besluiten dat de totale oppervlakte van het vierkant, die 1 is, gelijk is aan 3 keren 1/4, 3 keren 1/16, 3 keren 1/64, …, met andere woorden:

$$3 \times (1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \ldots) = 1$$
of $$1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \ldots = 1/3.$$

Kort terzijde: Als je vandaag zou vragen aan een student wiskunde hoe je deze formule kunt aantonen, dan vermoed ik dat heel snel de volgende, puur algebraïsche versie, geproduceerd zou worden (met een beetje wiskundige slordigheid):

Stel dat S de gezochte som is, dan is

$4 \times S = 1 + 1/4 + 1/4^2 + \ldots$, omdat elke term met 4 wordt vermenigvuldigd,
$4 \times S = 1 + (1/4 + 1/4^2 + \ldots)$,
of $4 \times S = 1 + S$, want dat is precies wat er tussen haakjes staat, wat wil zeggen dat
$3 \times S = 1$
dus $S = 1/3$.

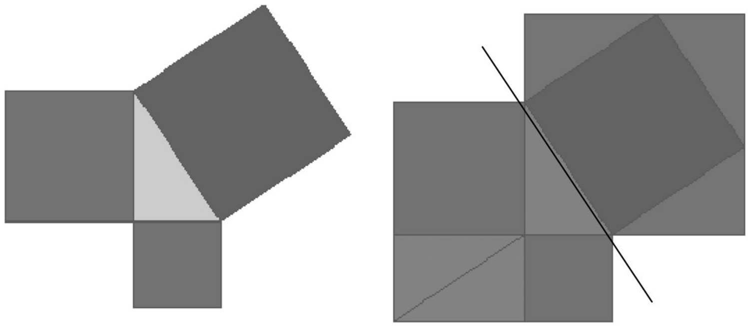
Het verschil tussen beide bewijzen mag duidelijk zijn. *Einde terzijde*.

Wat uiteraard niet mag ontbreken om deze sectie af te sluiten, is de beroemdste stelling van allemaal, namelijk de stelling van Pythagoras. Op dit ogenblik zijn meer dan 300 verschillende bewijzen bekend[4], hieronder beperk ik mij tot één van de mooiste ‘kijkbewijzen’, waarbij het vermeldenswaard is

4 Het mag verrassend lijken dat wiskundigen voor eenzelfde stelling meerdere bewijzen zoeken, maar daar zijn verschillende redenen voor te geven. Ik geef er één: indien in verschillende domeinen, bijvoorbeeld de algebra en de meetkunde, dezelfde bewering bewezen kan worden, dan versterkt dat de juistheid van die bewering, want in één bewijs kan altijd een goed verborgen fout zitten. De kans dat dat in meerdere bewijzen gelijktijdig gebeurt wordt met elk extra bewijs kleiner. Zie Maor (2007) voor een geschiedenis en overzicht van de verschillende versies.

dat niemand minder dan Multatuli[5] deze versie heeft bedacht.

$a^2 + b^2 = c^2$



Op de figuur links zien we in het midden de rechthoekige driehoek met op elke zijde het bijhorende vierkant. Aan te tonen is dus dat het grote vierkant in oppervlakte gelijk is aan de twee kleinere vierkanten. Dit kan eenvoudig aangetoond worden door aan de figuur een aantal driehoeken toe te voegen, vijf in totaal, zodat de figuur rechts wordt bekomen. De zwarte lijn deelt de figuur in twee gelijke delen, wat eenvoudig te zien is. De oppervlakte links van de streep is dus gelijk aan de oppervlakte rechts van de streep of:

twee kleine vierkanten + drie driehoeken = groot vierkant + drie driehoeken

wat vereenvoudigt tot:

twee kleine vierkanten = groot vierkant, of
$a^2 + b^2 = c^2$.

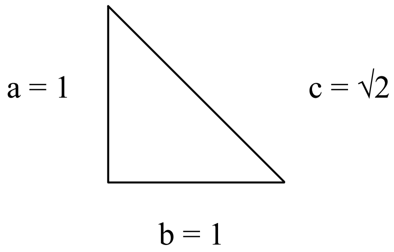
Merkwaardig genoeg is het precies deze stelling die tot een belangrijke en fundamentele wijziging heeft geleid in het concept van een wiskundig bewijs.

Het 'drama' van de vierkantswortel van 2

Een directe toepassing van de stelling van Pythagoras heeft betrekking op een rechthoekige driehoek waarvan de beide rechthoekszijdes een lengte hebben

5 Dit bewijs komt voor als item 529 in het tweede deeltje van de verzamelde *Ideeën* van Multatuli, die op hun beurt uiteraard in de *Volledige Werken* zijn opgenomen, maar het item zelf is ook te lezen op: http://www.math.ru.nl/werkgroepen/gmfw/bronnen/multatuli1.html (geconsulteerd op 3 februari 2013).

gelijk aan 1. De vraag die zich stelt is wat dan de lengte van de schuine zijde moet zijn? Gezien in dit geval $a = 1$ en $b = 1$ wordt $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ en dus is $c = \sqrt{2}$.



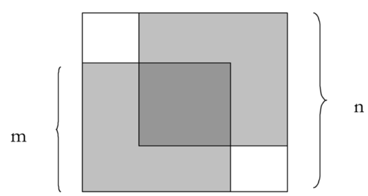
Maar welke grootheid is nu precies $\sqrt{2}$? Vandaag zullen we zonder probleem antwoorden dat het een getal is, maar dan nog blijft de vraag welk soort getal: een geheel getal, een breuk of nog iets anders? Gehele getallen en breuken waren in de periode waarover we hier spreken bekend. Dat $\sqrt{2}$ geen geheel getal kan zijn, is duidelijk vermits $\sqrt{1} = 1$ en $\sqrt{4} = 2$, dus moet $\sqrt{2}$ gelegen zijn tussen 1 en 2. Kan het dan een breuk zijn? Anders gezegd, is het mogelijk om $\sqrt{2}$ te schrijven als n/m voor twee gehele getallen? De details van de historische gebeurtenis zullen we nooit meer kunnen achterhalen, maar het curieuze fenomeen is dat men in de pythagoreïsche periode heeft aangetoond dat het antwoord negatief moet zijn. Dit betekent dus dat $\sqrt{2}$ geen breuk is.

Voor een niet-wiskundige moet de volgende vraag wel deze zijn: hoe toon je zoiets aan? Hoe toon je aan dat iets een bepaalde eigenschap *niet* heeft? Een mogelijke weg is om aan te tonen dat, indien het de desbetreffende eigenschap wel zou hebben, je 'in de problemen komt'. Maar wat kan dat laatste dan weer betekenen? Voor wiskundigen is het probleem aller problemen dat je uitkomt op een tegenstrijdigheid of contradictie. De reden daarvoor kan met een eenvoudig voorbeeld geïllustreerd worden. Stel dat je in staat zou zijn om aan te tonen dat $2 + 2 = 5$. Aangezien ook $2 + 2 = 4$, volgt er dat $4 = 5$ maar, als we van beide kanten 4 aftrekken, ook dat $0 = 1$. Dus is elk getal $n = n + 0 = n + 1$ en dus zijn alle getallen gelijk. Een dergelijke wiskunde is onbruikbaar. Het bewijs voor $\sqrt{2}$ kan nu als volgt worden neergeschreven:

1. Neem aan dat er een n en een m bestaan zodanig dat $\sqrt{2} = n/m$.
2. Neem verder aan dat n en m vereenvoudigd zijn (dus stel dat $n = 6$ en $m = 4$ dan is $n/m = 6/4$ en dit kan vereenvoudigd worden tot $3/2$ (bemerk dat je een breuk altijd kan vereenvoudigen tot het punt dat n en m geen factoren meer gemeenschappelijk hebben).

3. Indien $\sqrt{2} = n/m$ dan is $2 = n^2/m^2$ en dus $2m^2 = n^2$ (door beide kanten te kwadrateren).
4. Uit $2m^2 = n^2$ volgt dat n^2 even is, want het is 2 maal een getal.
5. Maar, als n^2 even is, dan moet n zelf ook even zijn en dus is n van de vorm 2s voor een getal s, $n = 2s$.
6. Er volgt nu dat $2m^2 = (2s)^2 = 4s^2$ of, na deling door 2, dat $m^2 = 2s^2$.
7. Uit $m^2 = 2s^2$ volgt dat m^2 even is want het is 2 maal een getal.
8. Maar, als m^2 even is, dan moet m zelf ook even zijn, en dus is m van de vorm 2t voor een getal t, $m = 2t$.
9. Als $n = 2s$ en $m = 2t$, dan hebben n en m wel een factor gemeenschappelijk, namelijk 2, wat de tweede veronderstelling (op lijn 2) tegenspreekt.
10. Dus moet de eerste veronderstelling fout zijn en is n/m niet te schrijven als een breuk.

Het moge duidelijk zijn hoe radicaal dit bewijs verschilt van de voorgaande bewijzen door te ‘kijken’. Nochtans zou het een foute conclusie zijn om te denken dat een visueel bewijs voor de irrationaliteit van 2 daardoor uitgesloten zou zijn. Bekijk de volgende figuur:



Het grote vierkant stemt overeen met n^2. Indien $n^2 = 2m^2$ dan is het grote vierkant gelijk aan de twee kleinere lichtgrijze vierkanten. Maar, zoals men kan ‘zien’, vullen de kleinere vierkanten het vierkant niet op. Er blijven twee witte vierkanten over. De verklaring is eenvoudig: de twee witte vierkanten stemmen overeen met de overlapping, in het donkergrijs aangeduid, van de twee lichtgrijze vierkanten. Stel dat de oppervlakte van het donkergrijs vierkant p^2 is (voor een bepaalde p) en de oppervlakte van een wit vierkant q^2, dan betekent dit dat

$$p^2 = 2q^2,$$

wat betekent dat we nu een ‘kleinere’ oplossing gevonden hebben. Als we de constructie herhalen met p en q zullen we een nog kleinere oplossing vinden en dat kan niet blijven doorgaan vermits we met gehele getallen werken.

Dit gezegd zijnde, blijft er een contrast met de voorgaande bewijzen ‘door te kijken’. Hier spreken we over een constructie die herhaald moet worden tot wanneer een bepaalde toestand bereikt wordt. Wat de constructie echter laat zien, is dat die toestand nooit bereikt kan worden, en dat is een negatieve conclusie die uiteraard niet zonder meer uit de figuur kan worden afgelezen. Wat wel blijft, is dat een visuele voorstelling niet uitgesloten is.

De bewijsmethode die ik hier heb uiteengezet aan de hand van de irrationaliteit van de vierkantswortel van 2, is een algemene methode die vandaag bekend staat als het bewijs 'uit het ongerijmde' of het *reductio ad absurdum*. De algemene vorm luidt als volgt: wil men aantonen dat A het geval is (of niet het geval is), veronderstel dat A niet het geval is (of dat A het geval is) en toon aan dat hieruit een tegenstrijdigheid of contradictie volgt. Je toont dus iets aan door te bewijzen dat het tegendeel niet kan, op straffe van tegenspraak. Kenmerkend voor deze bewijsmethode is:

(a) dat ze indirect is, omdat de redenering alleen spreekt over het tegendeel: wil je A aantonen, dan redeneer je verder met de ontkenning van A, of omgekeerd;
(b) dat ze veronderstelt dat er maar twee mogelijkheden zijn: ofwel is A het geval, ofwel is A niet het geval; er zijn dus geen tussenmogelijkheden;
(c) dat ze aanneemt dat tegenstrijdigheden niet kunnen voorkomen: hoewel dit zeer evident mag klinken – wat zou men zich moeten voorstellen bij een tegenspraak die het geval is? –, is het filosofisch-logisch onderbouwen van deze bewering alles behalve evident.[6]

Een bijkomend element van deze methode is dat ze toelaat te redeneren in situaties waar een rechtstreekse benadering nauwelijks of niet uitvoerbaar is. Ik geef een eenvoudig voorbeeld. Stel dat je zou willen weten of er een geheel getal n bestaat zodanig dat:

$$n^2 + 7n = 2.764.529.287.824.635$$

Een directe methode bestaat eruit verschillende mogelijkheden voor n uit te proberen tot $n^2 + 7n$ groter wordt dan het opgegeven getal. Ofwel is er onderweg een n geweest die voldoet aan de vergelijking ofwel niet. In het tweede geval weet je dat een dergelijke n effectief niet bestaat. Met een bewijs uit het ongerijmde redeneer je als volgt:

6 In de logica staat deze bewering bekend als het principe van niet-contradictie (PNC): het is uitgesloten dat een bewering en haar ontkenning samen het geval kunnen zijn. De eerste filosoof in de westerse traditie die dit principe met verve heeft proberen te verdedigen, is Aristoteles, meer bepaald in de *Metafysica Gamma*. Maar, interessant genoeg, is hij niet echt in zijn opzet geslaagd. Zie Kirwan (1993) voor een Engelse versie van de oorspronkelijke tekst en Priest e.a. (2004) voor een hedendaagse, kritische reflectie over dit principe.

1. Stel dat er een geheel getal n bestaat dat voldoet aan de vergelijking.
2. Vermits die n een geheel getal is, is n even of oneven.
3. Als n even is, dan is n^2 even en ook 7n, en dus ook $n^2 + 7n$.
4. Als n oneven is, dan is n^2 oneven en ook 7n, en dus is $n^2 + 7n$ even.
5. Hoe dan ook, $n^2 + 7n$ is een even getal.
6. Aangezien het getal aan de rechterkant oneven is kan het nooit gelijk zijn aan een even getal.
7. De bewering op lijn 1 is dus fout, met andere woorden, er bestaat geen n die aan de vergelijking voldoet.

Hoewel deze bewijsmethode op het eerste gezicht niet meteen als evident kan worden beschouwd, vormt ze wel een integraal onderdeel van de wiskunde. Deze ontwikkeling heeft zich historisch gesproken zelfs vrij snel voorgedaan, want als we twee eeuwen verder kijken na Pythagoras, dan zien we een ware transformatie in het wiskundig denken. Geen betere bron om dit in iets meer detail te bekijken dan de dertien boeken van Euclides, bekend als *De elementen*.

Euclides en *De elementen*

Dit basiswerk van de Griekse wiskunde[7] behandelt in dertien boeken de beginselen van de meetkunde en de rekenkunde, geometrisch benaderd (maar niet in pythagoreïsche zin), met als hoogtepunt – men mag zelfs spreken van een orgelpunt – het bewijs dat er in de driedimensionele Euclidische ruimte slechts vijf regelmatige veelvlakken kunnen voorkomen: het viervlak of piramide, zesvlak of kubus, het achtvlak, het twaalfvlak en het twintigvlak. Merkwaardig genoeg staan deze veelvlakken vandaag bekend als de *platonische* veelvlakken.

Op heel wat plaatsen in *De elementen* worden bewijzen gepresenteerd uit het ongerijmde. Het best gekende en ook belangrijkste bewijs betreft de niet-eindigheid van de priemgetallen, te vinden in het negende boek als stelling twintig (Heath 1956, vol. 2: 412-413). Bemerk dat ik schrijf ‘niet-eindigheid’ en niet ‘oneindigheid’. Ik wil deze twee begrippen inderdaad gescheiden houden, zoals duidelijk zal worden na de presentatie van het bewijs zelf. Hiervoor zijn eerst een paar voorbereidende stappen nodig.

We beschouwen de gehele getallen: 1, 2, 3, … Elk getal heeft delers. Zo heeft 12 de delers 1, 2, 3, 4, 6 en 12 zelf. Het kleinste aantal delers dat een

7 De bekendste Engelstalige uitgave in drie delen is Heath (1956).

getal, behalve 1, kan hebben is twee: 1 en het getal zelf. Dergelijke getallen worden priemgetallen genoemd. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … zijn de eerste priemgetallen in de rij van alle getallen. Het belang van deze getallen in de wiskunde mag duidelijk zijn. Neem een willekeurige getal en zoek delers van dat getal. Hebben de delers weer delers, zoek dan die delers. Dit proces kan maar een einde kennen als je uiteindelijk botst op priemgetallen. Zo is bijvoorbeeld 28 = 4 × 7 = (2 × 2) × 7 en het proces stopt. De vraag die Euclides wenst te beantwoorden, is hoeveel priemgetallen er zijn: een eindig aantal of niet? Ik presenteer het bewijs in moderne notatie, maar het verloop ervan verschilt nauwelijks van de oorspronkelijke versie:

1. Stel dat $p_1, p_2, \ldots, p_n$ alle priemgetallen voorstellen en dat de lijst eindig is.
2. Vorm nu het getal $N = p_1.p_2. \ldots p_n + 1$.
3. Er zijn maar twee mogelijkheden: N is zelf een priemgetal of niet.
4. In het eerste geval is het duidelijk dat $N > p_i$, voor elke i, en dus staan in de lijst niet alle priemgetallen.
5. In het tweede geval moet N delers hebben die, zoals hierboven vermeld, uiteindelijk priemgetallen zijn. Stel dat q zo’n priemgetal is. Dan volgt dat q moet verschillen van alle p_i omdat N deelbaar is door q maar niet door p_i. Deling door p_i laat een rest van 1. Opnieuw staan in de lijst niet alle priemgetallen.
6. Uit 3, 4 en 5 volgt dat in de lijst niet alle priemgetallen staan, wat in tegenspraak is met 1.
7. Conclusie: de lijst van priemgetallen is niet eindig.

Het onderscheid tussen niet-eindig en oneindig is nu eenvoudig toe te lichten. Wat het bewijs aantoont, is dat elke eindige lijst van priemgetallen steeds verder uitgebreid kan worden. Of, alternatief geformuleerd, indien iemand zou beweren dat deze lijst alle priemgetallen bevat, laat het bewijs toe om minstens één ontbrekend priemgetal te vinden. Dit betekent ook dat het bewijs gelezen kan worden als een constructiemethode. Stel dat iemand beweert dat 2, 3, 5 en 7 alle priemgetallen zijn. Dan is het voldoende om N = 2.3.5.7 + 1 = 210 + 1 = 211 te construeren en hiervan de uiteindelijke delers te zoeken. We zullen snel klaar zijn, want 211 is zelf een priemgetal. Hieruit volgt evenwel niet dat er oneindig veel priemgetallen *bestaan*. Want dat veronderstelt dat we de hier geschetste methode een oneindig aantal keer kunnen toepassen, en dat is allesbehalve evident.

Ik had reeds vermeld dat een bewijs uit het ongerijmde toelaat om indirect te redeneren, daar waar een directe controle uitgesloten is. Maar er zijn nog twee belangrijke aspecten aan deze bewijsvorm die ik graag wil toelichten, en waarvan ik ook de problematische kant wil belichten. Het eerste aspect betreft de gedachte dat je redeneert over een 'alternatief' om iets te weten te komen over het 'origineel'. Je wilt, zoals gezegd, A aantonen, maar je redeneert op de ontkenning van A. Een gevolg hiervan kan zijn dat je op het einde van het bewijs wel weet dat A het geval is maar dat je ook niet meer weet dan dat. Laat ik dit meteen illustreren met een voorbeeld. Stel dat we een rij getallen hebben (met 0 inbegrepen):

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.$$

Stel dat we de volgende bewering willen aantonen: indien de som van alle a_i verschillend is van 0, dan is er op zijn minst één element verschillend van 0. Het bewijs is vrij eenvoudig:

1. Stel dat de som van alle a_i verschillend is van 0.
2. Stel bovendien dat alle elementen a_i gelijk waren aan 0.
3. Uit 2 volgt dat de som van alle a_i ook gelijk moet zijn aan 0.
4. Dat spreekt 2 tegen, dus, als 1 het geval is, kan 2 niet het geval zijn, dus is er op zijn minst één element verschillend van 0, als de som verschillend is van 0.

Wat weten we nu? We weten dat er een van 0 verschillend element moet bestaan, maar *waar* zich dat bevindt in de rij is totaal onbepaald. Neem een extreem geval. Veronderstel dat alle elementen in de rij, op één na, allemaal 0 zijn. Dat voldoet aan de stelling, maar het bewijs zegt niet waar dat ene, van nul verschillende element zich bevindt. Het is volkomen begrijpelijk dat een wiskundige zoals Paul Gordan het gebruik van deze bewijsvorm heeft omschreven als theologie en niet als wiskunde[8]. Een rake bemerking gezien de rol die het bewijs uit het ongerijmde heeft gespeeld – en nog steeds speelt (*cf. infra*) – in het zoeken naar een (ontologisch) godsbewijs. Als het bewijs eindigt, weet je (misschien) dat God bestaat, maar ook niet meer dan dat.

Het tweede aspect heeft te maken met het feit dat je redeneert over een 'alternatief' dat uiteindelijk onmogelijk blijkt te zijn, of wat los geformuleerd: je redeneert over iets dat niet kan. Laat ik ook dit aspect meteen illus-

[8] Paul Gordan zou deze uitspraak gedaan hebben – "Das ist keine Mathematik, das ist Theologie" – naar aanleiding van een bewijs geleverd door één van de grootste wiskundigen van de twintigste eeuw, namelijk David Hilbert. Het bewijs toonde het bestaan aan van een specifieke mathematische structuur zonder ook maar iets te zeggen over de eigenschappen van die structuur zelf.

treren met een voorbeeld. Stel dat ik wil aantonen dat de vierkante cirkel niet bestaat (in het Euclidische vlak). Het bewijs is de eenvoud zelve:

1. Neem aan dat de vierkante cirkel wel bestaat.
2. Dan heeft hij hoeken omdat het een vierkant is.
3. Dan heeft hij geen hoeken omdat het een cirkel is.
4. 2 en 3 vormen een tegenspraak.
5. Conclusie: 1 is onmogelijk, dus de vierkante cirkel bestaat niet.

In mijn eigen ervaring is een dergelijk bewijs voor niet-wiskundigen zeer verwarrend.[9] In de eerste stap neem je al iets aan dat onmogelijk is, dus mag je niet verbaasd zijn dat je 'vreemde zaken' aantoont. Hoe kan je nu redeneren met onmogelijke objecten? In heel wat gevallen volstaat het om op te merken dat wij zeer vaak redeneren met onmogelijke gegevens. Denk bijvoorbeeld aan een bioloog die ons er op basis van biologische argumenten van overtuigt dat een mens die meer dan een ton weegt niet kan bestaan. Dan doen we toch precies hetzelfde: we redeneren over een object dat niet kan bestaan. Wat wel problematisch blijft, is het gegeven dat we er ons geen voorstelling meer van kunnen maken. Ook als ik aanneem, bij onderstelling, dat de vierkante cirkel bestaat, dan kan ik er geen voorstelling van hebben. Misschien zie ik een vierkant met bolle zijden maar dat is noch een vierkant, noch een cirkel. Net zoals we ons een mens van één ton misschien vaag kunnen voorstellen, maar dan toch zeker niet in detail. Het resultaat daarvan is dat je een niveau van abstractie introduceert dat niet aanwezig was bij de 'kijkbewijzen'. Aan de ene kant breid je de mogelijkheden om het wiskundig domein te verkennen immens uit, maar aan de andere kant introduceer je een abstractie die voor velen precies de overtuigingskracht van het wiskundig bewijs aantast.

In de volgende paragraaf van deze bijdrage wil ik graag kort een stand van zaken presenteren over de relevantie van dit onderwerp voor de wiskunde zoals we die vandaag kennen. Men zou immers kunnen denken dat deze bewijsvorm nu algemeen aanvaard is en dat 'kijkbewijzen' tot het verleden behoren, maar niets is minder waar. Er is heel wat discussie over wiskundige bewijzen vandaag, zowel binnen als buiten de wiskunde, en op een curieuze manier hebben visuele aspecten opnieuw aan belang gewonnen. Je zou bijna durven stellen dat Pythagoras terug is *with a vengeance*.

[9] De eigen ervaring is in dit geval gebaseerd op het doceren, gedurende bijna 30 jaar, van een inleidende cursus logica en wetenschapsfilosofie aan de VUB voor een publiek van gemiddeld 400 studenten, wat een mooie steekproef oplevert.

De relevantie voor de wiskunde vandaag

Een eerste belangrijke element om te vermelden is dat in de 20ste eeuw het gebruik van het bewijs uit ongerijmde opnieuw in vraag werd gesteld. Ik heb reeds aangegeven dat één van de merkwaardige eigenschappen van deze bewijsmethode is dat je het bestaan van een wiskundig object kunt aantonen zonder verder ook maar iets te weten te komen over de specifieke eigenschappen van dat object. Combineer dit met de vaststelling dat de vermelde eeuw de eeuw van de exploratie van de oneindigheid in de wiskunde is geweest[10], en dan wordt het begrijpelijk dat wiskundigen twijfels kregen over het gebruik van de methode in het geval van oneindige objecten. Belangrijke wiskundigen, zoals de Nederlandse L.E.J. Brouwer[11], drongen erop aan dat een wiskundig ding, wat het ook moge zijn, altijd vergezeld moet zijn van een constructiemethode, zodat we duidelijk weten waarover we spreken. Niet alleen vanuit deze constructieve hoek zijn twijfels geopperd, maar ook vanuit een geheel andere richting die ik hier maar kort kan vermelden. Zoals ik reeds heb vermeld, steunt de methode op het basiskenmerk dat tegenstrijdigheden niet kunnen voorkomen. Dus, zodra een object tegenstrijdige eigenschappen heeft, kan het niet bestaan. Eveneens in de 20ste eeuw is hierover twijfel gerezen. In de zogenaamde paraconsistente logica[12] wordt ruimte gecreëerd voor het toelaten van tegenspraken en vooral voor het gebruik ervan in redeneringen. De redenen hiervoor zal ik hier niet uiteenzetten, maar het volstaat even de bedenking te maken hoe vaak we ons niet tegenspreken in het dagelijkse taalverkeer. Dit gezegd zijnde, zou het niet correct zijn om te beweren dat de methode door de meerderheid van de wiskundigen verworpen wordt, het tegendeel is het geval. Ze maakt volwaardig onderdeel uit van de gangbare wiskundige praktijk.

Om de terugkeer van bewijzen door ‘kijken’ te illustreren, moet eerst iets gezegd worden over het statuut van wiskundige bewijzen vandaag. Het hoeft geen bewijs, zou ik durven zeggen, dat de wiskunde vandaag een abstractie heeft bereikt die ze in voorbije tijden nooit heeft gekend. Dit betekent onder andere dat er vandaag bewijzen bestaan die een paar duizend bladzijden beslaan, zodat men zich terecht de vraag kan stellen wie dit nog kan beoorde-

10 De grondlegger van de mathematische studie van oneindigheid is zonder enige twijfel Georg Cantor. Zie Dauben (1979) voor een biografie en een situering.

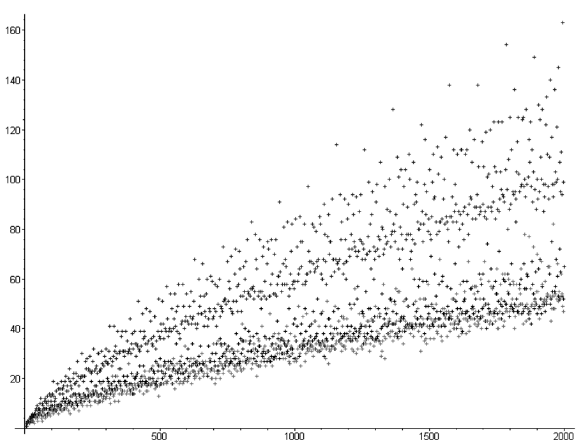
11 De visie die Brouwer heeft uitgewerkt, staat thans bekend als het intuïtionisme omdat de intuïtie van het opeenvolgende tellen een basis vormde voor (een deel van) zijn wiskunde. Later werd deze benadering veralgemeend tot het constructivisme.

12 Zie Priest & Tanaka (2013) voor een heldere inleiding tot deze logica’s waarin het mogelijk wordt om met tegenstrijdigheden te redeneren.

len.[13] Maar het betekent ook dat de wiskundige vraagstellingen steeds complexer en moeilijker worden. Een enigszins naïef argument mag hier zonder probleem gebruikt worden, namelijk dat, als alle eenvoudige problemen opgelost zijn, alleen de complex(er)e overblijven. Om hierop een greep te krijgen, is *exploratie* een meer dan verdedigbare methode. Laat ik dit meteen met een voorbeeld illustreren.

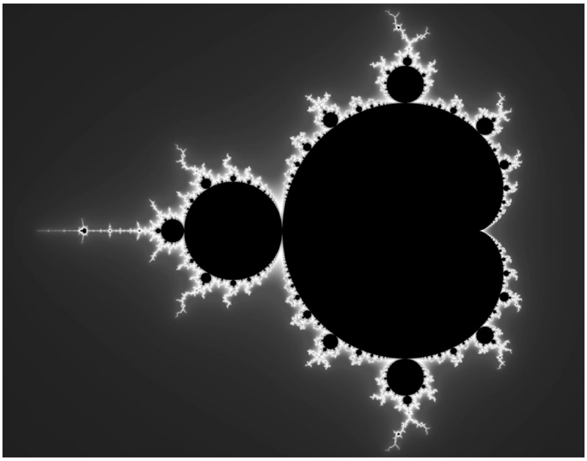
Een beroemd open vraagstuk in de wiskunde vandaag, meer bepaald in de rekenkunde, is het vermoeden van Goldbach. Priemgetallen zijn al vermeld, dus kan ik het vraagstuk zonder meer presenteren. We bekijken opnieuw de gehele getallen, in het bijzonder de even getallen. Goldbach stelde de vraag of elk even geheel getal geschreven kan worden als de som van twee priemgetallen. Een exploratie in de context van dit probleem bestaat eenvoudigweg uit het controleren van de bewering voor een eindig aantal even getallen. Het feit dat $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, … helpt ons niet noodzakelijk vooruit wat het vinden van het bewijs betreft maar de zaak verandert wel enigszins indien we niet een paar maar een paar miljard gevallen kunnen bekijken. De lezer vermoedt waar ik heen wil: de exponentieel toegenomen rekenkracht van de computer laat dit precies toe. Ik benadruk nogmaals dat dit ons niet het bewijs zal opleveren maar, als je weet dat tot aan 4×10^{18} alles klopt (en vermoedelijk zal deze grens ondertussen al weer verbeterd zijn), dan weet je meteen ook dat het zoeken naar een tegenvoorbeeld niet eenvoudig zal zijn. Dit levert uiteraard nog geen bewijs door te ‘kijken’ op, maar het is wel zo dat de informatie die op die manier bekomen wordt, interessant is voor de wiskundige, hoewel er niet per se iets wordt bewezen.

De link wordt al iets duidelijker indien we denken in termen van grafieken. Blijven we even bij Goldbachs vermoeden. Een interessante functie in dit verband is de functie G(2n) die voor een even getal 2n telt op hoeveel manieren dit getal als de som van twee priemgetallen ge-



[13] Ik verwijs graag naar Van Bendegem (2004) voor voorbeelden van dergelijke bewijzen.

schreven kan worden. Zodoende wordt G(4) = 1, G(6) = 1, G(8) = 1, G(10) = 2, G(12) = 1, … Het vermoeden van Goldbach zegt niets anders dan dat G(2n) groter of gelijk is aan 1. Stel even dat je zou kunnen aantonen dat voor elk even getal 2n en het daaropvolgende even getal, 2n + 2, het zo zou zijn dat G(2n + 2) groter of gelijk is aan G(2n). Dan is het vermoeden van Goldbach hiermee bewezen. Bekijk nu even de grafiek hiernaast, die G(2n) weergeeft tot het getal 2000. Is het niet verleidelijk om te denken dat de G-functie effectief stijgt en blijft stijgen? Geen bewijs, zeer zeker, maar een stevige hint door gewoon te 'kijken'.



Dit is nog steeds niet het einde van het verhaal. Het aspect 'kijken' wordt nog krachtiger wanneer we wel over een wiskundige beschrijving van een object beschikken, maar nauwelijks een idee hebben hoe we ons het object zouden kunnen voorstellen. Dit heeft uiteraard opnieuw te maken met de complexiteit van de huidige wiskunde. Wat illustraties betreft is er, denk ik, geen beter voorbeeld te bedenken dan de studie van de zogenaamde fractalen. Een fractaal is een geometrische figuur met de bijzonder eigenschap dat, als een deel van de figuur wordt uitvergroot, we een kopie van het origineel bekomen. Hoewel de wiskundige beschrijving van een bedrieglijke eenvoud kan zijn, zijn de voorstellingen ervan van een impressionante complexiteit. De voorstelling stelt één van de bekendste fractalen voor, de zogenaamde Mandelbrot verzameling, en wordt beschreven door een relatief eenvoudige transformatie, zij het wel gedefinieerd op de complexe getallen.[14] Het is duidelijk dat bij de studie van dergelijke structuren een mogelijke

[14] Zonder uit te leggen wat complexe getallen zijn, ziet de transformatie er, gegeven deze getallen, vrij eenvoudig uit. Neem een complex getal z en bereken $z^2 + c$, waarbij c een constante is. Je start met een getal z, berekent $z^2 + c$ om vervolgens deze uitkomst te gebruiken als nieuwe z om $z^2 + c$ te berekenen. Dit kan oneindig doorgaan en in sommige gevallen worden de waarden groter en groter, maar in sommige gevallen blijven de waarden hangen rond een bepaald getal. Alle punten in het zwarte gebied van de figuur voldoen aan deze laatste eigenschap, alles wat erbuiten ligt niet. De complexiteit van de figuur heeft dus in eerste instantie te maken met de grens tussen deze twee gevallen.

voorstelling kan helpen om bepaalde aspecten te ‘zien’. Zo laat de figuur zien dat de zwarte vormen boven en onderaan het grote zwarte gebied zeer goed lijken op de gehele figuur, wat inderdaad het geval is. Maar, zoals reeds gezegd, deze figuren leveren ons geen bewijs op, maar wel een gedeeltelijk inzicht dat kan helpen bij het zoeken naar een bewijs. Eerder dan zekerheid op te leveren, helpen ze ons op weg om die zekerheid te vinden.

De ongerijmdheid van (het bestaan van) God

Deze korte verkenning van de wiskunde vandaag maakt duidelijk dat de Griekse ‘erfenis’ nog steeds van het grootste belang is. Hoe beter we begrijpen welke de elementen zijn geweest die het mogelijk hebben gemaakt dat het bewijs uit het ongerijmde zo’n vaste plaats heeft verworven, hoe beter we kunnen inschatten wat zijn overtuigingskracht is.[15] Zou men zich de bedenking maken dat dit toch alleen maar relevant kan zijn voor de wiskunde zelf, dan mag ik opmerken dat de wiskunde voor de gehele cultuur, inbegrepen de wetenschappen, van essentieel belang is. Dat is bijvoorbeeld heel duidelijk in het geval van de natuurkunde, maar daar stopt het geenszins. Laat ik deze bijdrage afsluiten met een voorbeeld waar men het bewijs uit het ongerijmde niet meteen zou verwachten, namelijk de zoektocht naar ontologische godsbewijzen.[16]

Einde 11de, begin 12de eeuw komt Anselmus van Canterbury als één van de eersten op het idee om een bewijs te zoeken voor het bestaan van God. Ik zal hier niet ingaan op de details van zijn bewijs maar het interessante ervan is dat het gebruik maakt van het *reductio ad absurdum*. Na Anselmus zijn er vele pogingen geweest om dergelijke bewijzen te vinden – ik vermeld slechts René Descartes en Gottfried Wilhelm Leibniz –, maar ook hedendaagse denkers hebben er zich aan gewaagd, onder andere Kurt Gödel, Alvin Plantinga en Charles Hartshorne. Meer zelfs, recent is er een nieuwe versie opgedoken met als auteur Emanuel Rutten van de Vrije Universiteit Amsterdam. In taal uitgedrukt verloopt zijn redenering als volgt:

1. Al wat onkenbaar is, is noodzakelijk vals.
2. De uitspraak “God bestaat niet” is onkenbaar.
3. Dus is de uitspraak “God bestaat niet” noodzakelijk vals.
4. Dus is de uitspraak “God bestaat” noodzakelijk waar.

[15] Een auteur die in dit verband baanbrekend werk heeft verricht is Reviel Netz (1999, 2009).

[16] Wat volgt kan uitgebreider nagelezen worden in mijn boek *Tot in der eindigheid. Over wetenschap, new age en religie* (Van Bendegem 1997). Het boek kan ook nagelezen en gedownload worden op http://www.jeanpaulvanbendegem.be/tot%20in%20der%20eindigheid.pdf.

Op het eerste gezicht lijkt hier nergens een *reductio* aan te pas te komen, wat inderdaad het geval is, maar de conclusie op lijn 4 is maar aanvaardbaar indien de uitspraken op de lijnen 1 en 2 dat zijn. Om uitspraak 1 aan te tonen is ook niet meteen een *reductio* nodig? Hiervoor redeneert Rutten als volgt:

1. Als iets mogelijk het geval is, dan kan het gekend worden.
2. Dus als iets niet kan gekend worden, dan is het niet mogelijk dat dit het geval is.
3. Dus als iets onkenbaar is, dan is het noodzakelijk niet het geval of noodzakelijk vals.

Indien we er geen probleem van maken dat de uitspraak op lijn 1 aanvaardbaar is, dan komen we nu tot de kern van de zaak, namelijk de bewering dat de uitspraak “God bestaat niet” onkenbaar is. Eerder dan deze bewering aan te tonen, is het gemakkelijker om aan te tonen dat haar negatie “God bestaat” kenbaar is. Om dit aan te tonen, redeneert Rutten als volgt:

1. Stel dat de uitspraak “God bestaat” onkenbaar is.
2. Er is een wereld denkbaar waarin God bestaat.
3. In die wereld kan God zijn eigen bestaan kennen.
4. Dus de uitspraak “God bestaat” is wel kenbaar.
5. De uitspraken op de lijnen 1 en 4 spreken elkaar tegen.
6. Dus is de uitspraak “God bestaat” kenbaar.
7. Dus is de uitspraak “God bestaat niet” onkenbaar.

Hier zien we duidelijk het gebruik van het *reductio ad absurdum* als bewijsvorm. Je toont niet aan dat God bestaat, maar wel dat je niet kunt beweren dat God niet bestaat. Het lijkt onvermijdelijk om op deze bewijsvorm terug te vallen, want hoe zou je met logisch-mathematische zekerheid kunnen aantonen dat God één of andere *positieve* eigenschap bezit? Dat gezegd zijnde, is het ontkrachten van de redenering van Rutten niet zo’n eenvoudige zaak. Er is al heel wat heen en weer gediscuteerd en zoals men mag verwachten – daarin lopen wijsbegeerte en theologie gelijk met elkaar op – is deze discussie, anno 2013, nog steeds lopende. Het lijkt onwaarschijnlijk dat deze zaak snel beslecht zal worden met of zonder *reductio*.

Bibliografie

Becker, O. (Hrsg.) 1965. *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Dauben, J.W. 1979. *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Heath T.L. (ed.) 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Volumes 1, 2 en 3. New York: Dover Publications.

Huffman, C. 2011. "Pythagoras", in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. E.N. Zalta (ed.). <http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/ pythagoras/ >.

Kirwan, C. (ed.) 1993. *Aristoteles. Metaphysics Books Γ, Δ, and E*. Oxford: Clarendon.

Maor, E. 2007. *The Pythagorean Theorem. A 4,000-Year History*. Princeton: Princeton University Press.

Netz, R. 1999. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University Press.

Netz, R. 2009. *Ludic Proof. Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Priest, G. & K. Tanaka 2013. "Paraconsistent Logic", in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. E.N. Zalta (ed.). <http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/ logic-paraconsistent/>.

Priest, G., J.C. Beall & B. Armour-Garb (eds.) 2004. *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*. Oxford: Clarendon Press.

Van Bendegem J.P. 1997. *Tot in der eindigheid. Over wetenschap, new age en religie*. Antwerpen: Hadewych.

Van Bendegem J.P. 2004. "The Creative Growth of Mathematics", in: D. Gabbay, S. Rahman, J. Symons & J.P. Van Bendegem (eds.). *Logic, Epistemology and the Unity of Science (LEUS)*. Vol. 1. Dordrecht: Kluwer Academic, 229-255.