

## THEORETISCHE BEREKENINGEN VAN SYSTEMATISCHE FOUTEN BIJ DE BEPALING VAN DE OPPERVLAKTE VAN HET GRONDVLAKE

door

**R. Goossens**

### 1. Inleiding

O.D.C 521.

Vermits bij de studie van het grondvlak het bestaan van een vorm wordt verondersteld, moet in de allereerste plaats de mogelijkheid gevonden worden om deze statische toestand te karakteriseren. De vorm (grondvlak op een tijdstip  $t$ ) kan als statische figuur op ondubbelzinnige wijze bepaald worden, wanneer uitgaande van een middelpunt  $M$  (zie figuur 1) de grootte van de beschrijvende straal  $r$  gekend is voor een doorlopende of spronggewijze variatie van de hoek  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ). Om praktische redenen wordt evenwel bij voorkeur met een vooraf aangenomen interval  $\Delta\theta$  gewerkt. Aan de vaste richtingen, welke bepaald zijn t.o.v. een referentierichting  $x$ , kunnen indices gegeven worden ( $u = 1, 2, 3, \dots$ ). De grootte van de straal  $r$  voor een bepaalde richting  $u$  wordt dan voorgesteld door de notatie  $r(u)$ .

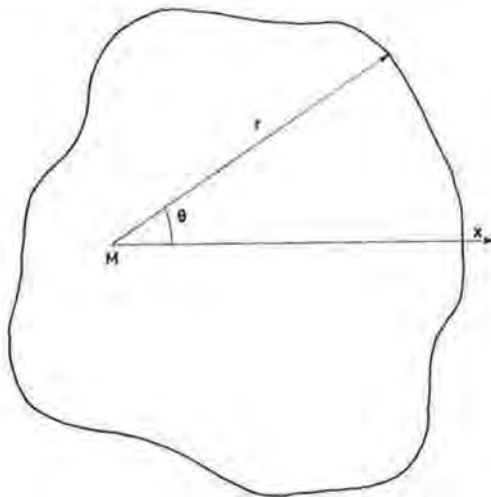


Fig. 1.

De vorm van een vlakke figuur is bijgevolg bepaald, wanneer haar grootte (absolute of relatieve) voor diverse richtingen gekend is, uitgaande van een vast, in het vlak en binnen de omtrek van de figuur gelegen punt ( $M$ ).

Wil men volledigheidshalve aanduiden dat het gaat over het grondvlak bij een leeftijd  $t$ , dan wordt aan de beschrijvende straal  $r$  de index  $t$  toegevoegd.

De algemene notatie voor de grootte van een willekeurige straal met richting  $u$  op een ogenblik  $t$  wordt bijgevolg  $r(u; t)$ .

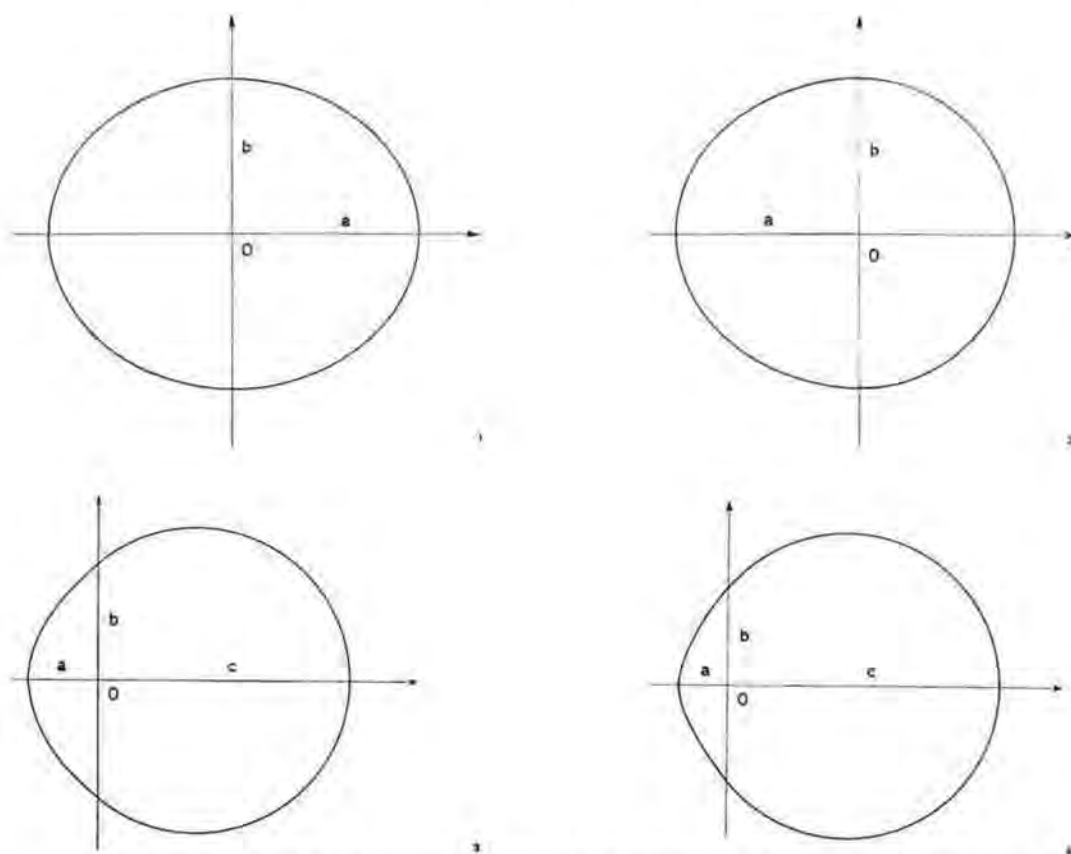


Fig. 2. Mogelijke theoretische figuren die in aanmerking komen om de vorm van het grondvlak te karakteriseren : ellips (1), ellips-cirkel (2), parabool-cirkel (3) en hyperbool-cirkel (4).

## 2. Overzicht van de gekozen parameters

### 2.1. Meetkundige vorm van het grondvlak (parameter $V$ )

Diverse studies van Matern (2, 3), Muller (4), Siostrzonek (5) en Goossens (1) hebben aangetoond dat in verband met de meetkundige benadering van het grondvlak, volgende theoretische figuren in aanmerking kunnen komen : ellips (1) met als bijzonder geval de cirkel; ellipscirkel (2); paraboolcirkel (3) en hyperboolcirkel (4) (cfr. figuur 2).

Dat de ellips verkozen werd voor het opstellen van de theoretische formules is te verantwoorden door het feit, dat deze figuur op eenvoudige manier kan aangepast worden aan de werkelijke toestand van het grondvlak, door gewoon de verhouding  $a$  tot  $b$  te wijzigen. Deze verhouding voorgesteld door het symbool  $V$ , kan nu groter zijn dan of gelijk aan 1.

Anderzijds kan bij variatie van de hoek  $\theta$  steeds dezelfde basisformule gebruikt worden voor de berekening van de stralen  $r(u; t)$ . Zulks is bij de gekombineerde meetkundige figuren als ellipscirkel, paraboolcirkel en hyperboolcirkel niet het geval, waardoor de basisformule en de afgeleide formules een vrij ingewikkelde en vooral onhandelbare vorm zouden aannemen. Tenslotte dient erop gewezen dat onderzoekingen bij diverse boomsoorten hebben aangetoond, dat zowel de vorm als de oppervlakte van het grondvlak het best door een ellips kan worden benaderd.

Het snijpunt  $O$  van de twee symmetrieassen wordt in het vervolg « meetkundig centrum » genoemd.

### 2.2. Grootte van het grondvlak (parameter $r(c; t)$ )

Naast de vorm moet ook de grootte van het grondvlak op een eenvoudige manier kunnen worden gekarakteriseerd. In analogie met de cirkel waarbij de straal zowel een maat is voor de omtrek als voor de oppervlakte, werd getracht voor de ellips een gelijkwaardige parameter in te voeren. In plaats van de grootte van het grondvlak te karakteriseren door de gebruikelijke parameters  $a$  en  $b$ , wordt zulks vervangen door één enkele parameter. Deze parameter welke in het vervolg « representatieve straal » zal worden genoemd en voorgesteld door het symbool  $r(c; t)$ , is eigenlijk de straal van een cirkelvormig grondvlak, dat op een ogenblik  $t$  dezelfde oppervlakte heeft als het overeenkomstig ellipsvormig grondvlak.

De gelijkheid tussen oppervlakte van een cirkel met straal  $r(c; t)$  en de oppervlakte van de ellips met halve assen  $a$  en  $b$ , leidt

tot onderstaande betrekking tussen de representatieve straal en de waarden a en b :

$$\pi r^2_{(c;t)} = \pi a_{(t)}b_{(t)}$$

waaruit  $r_{(c;t)} = \sqrt{a_{(t)}b_{(t)}}$  (1)

Naast het feit dat door het invoeren van de representatieve straal, de grootte van het grondvlak slechts door één grootte kan worden gekarakteriseerd, heeft het invoeren van deze parameter ook nog het voordeel dat alle klassieke formules uit de dendrometrie die betrekking hebben op een cirkelvormig grondvlak, ook op het ellipsvormig grondvlak kunnen toegepast worden.

### 2.3. Excentriciteit (parameter $x_0$ )

Evenals Siostrzonek (5) zijn we de mening toegedaan, dat er een onderscheid dient gemaakt tussen hoger gedefinieerd meetkundig centrum 0 en het punt M van waaruit de stralen  $r(u; t)$  gemeten worden (cfr. figuur 3). Dit punt M, dat bij de stamschijf middenin het houtmerg gelegen is, zal voortaan « boomcentrum » genoemd worden.

Meetkundig centrum 0 en boomcentrum M vallen niet noodzakelijkerwijze samen. De afstand tussen 0 en M wordt voorgesteld door  $x_0(t)$  en is een maat voor de excentriciteit op een leeftijd t. In het assenstelsel xoy (zie figuur 3) is deze grootte steeds kleiner dan of gelijk aan nul.

### 3. Basisformule voor het berekenen van een willekeurige straal r in functie van de hoek $\theta$

Hiertoe moet worden uitgegaan van de algemene vergelijking van de ellips, geplaatst in een rechthoekig assenstelsel xoy, zoals wordt voorgesteld in figuur 3 :

$$\frac{x^2}{a^2(t)} + \frac{y^2}{b^2(t)} = 1 \quad (2)$$

De beschrijvende straal  $r(u; t)$  (lijnstuk MP), kan in relatie tot de hoek  $\theta$  als volgt worden berekend :

$$r(u;t) = \frac{-x_0(t) + x}{\cos \theta} \quad (3)$$

Daar nu  $y = r(u; t) \cdot \sin \theta$ , kan de vergelijking (2) ook als volgt geschreven worden :

$$x = \pm a(t) \sqrt{1 - \frac{r^2(u;t) \sin^2 \theta}{b^2(t)}} \quad (4)$$

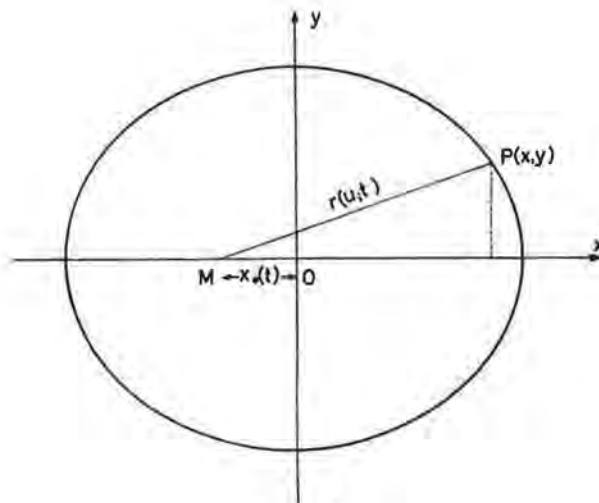


Fig. 3.

Door substitutie van deze x-waarde in de vergelijking (3), en na kwadrateren van beide leden, wordt de volgende tweede-graadsvergelijking in  $r(u; t)$  bekomen :

$$\left(\cos^2 \theta + \frac{a^2(t)}{b^2(t)} \sin^2 \theta\right) r^2(u; t) + 2r(u; t)x_0(t) \cos \theta + (x_0^2(t) - a^2(t)) = 0$$

met als bruikbare wortel :

$$r(u; t) = \frac{-x_0(t) \cos \theta + \sqrt{x_0^2(t) \cos^2 \theta - \left(\cos^2 \theta + \frac{a^2(t)}{b^2(t)} \sin^2 \theta\right) (x_0^2(t) - a^2(t))}}{\cos^2 \theta + \frac{a^2(t)}{b^2(t)} \sin^2 \theta} \quad (5)$$

$$\text{met } \begin{array}{l} x_0(t) \leq 0 \\ t > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 < b \leq a \\ 0^\circ \leq \theta < 360^\circ \end{array}$$

Nu is gebleken dat zowel bij de berekeningen van de beschrijvende straal en vooral bij de afgeleide berekeningen (zie verder) de invloed van  $x_0$  steeds gekoppeld is aan de grootte van de representatieve straal. Deze vaststelling heeft geleid tot het invoeren van het begrip « relatieve excentriciteit  $e(t)$  », met als uitdrukking :

$$e(t) = \frac{x_0(t)}{r(e; t)} \quad (6)$$

Door het feit dat  $x_0$  per definitie steeds negatief of nul is, zal de uitdrukking (6) dit eveneens zijn. Daar het zowel bij vermelding als in de grafische voorstellingen enkel en alleen om de absolute

waarde van de excentriciteit of de relatieve excentriciteit kan gaan, wordt in het vervolg van dit teken geen melding meer gemaakt. Alleen bij berekeningen moet er op gelet worden dat het hier om negatieve waarden gaat.

Door substitueren in de uitdrukking (5) van :

$$V(t) = \frac{a(t)}{b(t)}$$

$$r(c;t) = \sqrt{a(t) b(t)}$$

$$e(t) = \frac{x_0(t)}{\sqrt{a(t) b(t)}}$$

ontstaat uiteindelijk de basisformule waarmee de grootte van een beschrijvende straal  $r(u;t)$  kan berekend worden voor een willekeurige richting  $u$  (hoek  $\theta$ ) op een ogenblik  $t$ , wanneer de vorm  $V(t)$  van het grondvlak, de grootte van de representatieve straal  $r(c;t)$  en de relatieve excentriciteit  $e(t)$  gekend zijn :

$$r(u;t) = r(c;t) \frac{-e(t) \cos \theta + \sqrt{e^2(t) \cos^2 \theta - (\cos^2 \theta + V^2(t) \sin^2 \theta) (e^2(t) - V(t))}}{\cos^2 \theta + V^2(t) \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{met } V(t) &\geq 1 \\ e(t) &\leq 0 \\ r(c;t) &> 0 \\ 0^\circ &\leq \theta < 360^\circ \end{aligned} \quad (7)$$

Deze basisformule kan nu als vertrekpunt dienen voor het uitvoeren van twee soorten berekeningen. Een eerste groep van berekeningen heeft vnl. tot doel systematische fouten op te sporen die optreden bij straalmetingen, oppervlakte- en aanwasbepalingen aan niet cirkelvormige grondvlakken, in functie van de parameters  $V$ ,  $e$  en de hoek  $\theta$ . Een tweede mogelijkheid die de basisformule ons biedt, is de rekonstruktie van een grondvlak door berekening van de beschrijvende straal bij een zo klein mogelijk interval  $\Delta\theta$ . Is daarbij het verloop van de parameters  $V(t)$ ,  $e(t)$  en  $r(c;t)$  in functie van de tijd gekend, dan wordt de basisformule een « groeiformule » waarmee bij een vooropgestelde grootte van  $V$ ,  $e$  en  $r(c;t)$ , de ligging van het boomcentrum en de grootte en de vorm van het grondvlak kunnen berekend worden bij diverse waarden voor  $t$ .

In volgende paragraaf gaat het enkel om de eerste soort berekeningen, waarbij aan het grondvlak op een ogenblik  $t$  metingen worden verricht, zonder zich te bekommeren of zelfs iets af te weten van de toestand vóór noch na dit tijdstip. Al deze berekeningen zijn uitgevoerd met de ordinator IBM 1620.

#### 4. Afgeleide formules

##### 4.1. Fout op een willekeurige straal $r(u; t)$

Een eerste praktische afleiding, welke aan de hand van formule (7) kan gemaakt worden, is de berekening van de fout die ontstaat bij metingen van stralen op stamschijven of bij het nemen van boorspanen volgens diverse richtingen, uitgaande van het boomcentrum M.

Vermits de representatieve straal per definitie korrespondeert met een cirkel, waarvan de oppervlakte gelijk is aan deze van het gegeven grondvlak en daarenboven de verschillen tussen elkaar in de tijd opvolgende representatieve stralen de juiste waarde geven, zowel voor de aangroei van de straal als voor de aanwas op het grondvlak; ligt het voor de hand dat de fouten op een willekeurige straal  $r(u; t)$  steeds t.o.v. de representatieve straal zullen berekend worden.

De procentische fout  $Er(u; t)$  op een straal gemeten volgens een richting  $u$  op een leeftijd  $t$ , wordt als volgt bepaald :

$$Er_{(u;t)} = \frac{r_{(u;t)} - r_{(e;t)}}{r_{(e;t)}} \cdot 100$$

$$= \left( \frac{-e_{(t)} \cos \theta + \sqrt{e_{(t)}^2 \cos^2 \theta - (\cos^2 \theta + V_{(t)}^2 \sin^2 \theta) (e_{(t)}^2 - V_{(t)})}}{\cos^2 \theta + V_{(t)}^2 \sin^2 \theta} - 1 \right) 100 \quad (8)$$

Het verloop van deze fout bij een continue toename van  $e$  en een sprongsgewijze verandering van  $\theta$  ( $\Delta\theta = 30^\circ$ ) en  $V$ , wordt weergegeven in figuur 4. Vermits in de praktijk de waarde voor  $V$  gewoonlijk gelegen is tussen 1,00 en 1,15, werden voor de overzichtelijkheid van de grafiek, enkel die twee uiterste waarden erin opgenomen. Interessant is hierbij de zeer eenvoudige lineaire betrekking tussen  $Er(u; t)$  en  $e$  voor diverse waarden van  $V$ , wanneer de metingen gebeuren volgens de maximum ( $\theta = 0$ ) of de minimum ( $\theta = 180^\circ$ ) straal. Inderdaad voor beide richtingen krijgt men op het teken vóór  $e(t)$  na, dezelfde onderstaande betrekking ter berekening van de procentische fout op  $r(u; t)$  :

$$Er_{(u;t)} = (\pm e_{(t)} + \sqrt{V_{(t)} - 1}) 100$$

Verder is duidelijk te zien dat voor  $e$  groter dan 0,1, de gemeten stralen te groot zijn voor hoekwaarden gaande van  $0^\circ$  tot en met  $60^\circ$ . Bij hoekwaarden vanaf  $90^\circ$  tot en met  $180^\circ$  zijn de gemeten stralen daarentegen te klein t.o.v. de representatieve straal. Voor wat de invloed van  $V$  betreft is duidelijk te bemerken dat deze terug afhankelijk is van de hoek  $\theta$ . Bij  $\theta$  gelijk aan nul is de fout des te groter naarmate  $V$  groter is. Voor  $\theta$  gelijk aan  $30^\circ$  grijpt er

een omkering van dit effect plaats, die zich handhaaft tot ruim  $60^\circ$  van de maximum straal. Hierna wordt terug bij een kleinere  $V$  ook een kleinere procentische fout gevonden; om dan terug bij  $120^\circ$  tot een omkering te komen die zich bestendigt tot en met de  $180^\circ$ . Tenslotte is eveneens duidelijk te zien dat de invloed van  $e$  het geringst is tussen  $60^\circ$  en  $90^\circ$ , waarvoor het effect van  $V$  in de meeste gevallen relatief groot is.

#### 4.2. Fout op de gemiddelde straal $\bar{r}(t)$

Het is eveneens belangrijk na te gaan in hoever voor een gegeven leeftijd  $t$ , de juiste waarde van de representatieve straal kan benaderd worden, door een zeker aantal stralen te meten en vervolgens hiervan het gemiddelde te maken. In dit voorbeeld werden de berekeningen van de stralen met een interval van  $30^\circ$  uitgevoerd, zodat het resultaat steeds het gemiddelde zal zijn van twaalf stralen, welke regelmatig over het beschouwde grondvlak verdeeld liggen.

Wordt dit gemiddelde voorgesteld door het symbool  $\bar{r}(t)$ , dan is :

$$\bar{r}(t) = \frac{\sum_{u=1}^{u=12} r(u;t)}{12}$$

met  $u = 1, 2, \dots, 12$ ; wat overeenkomt met  $\theta$  respectievelijk gelijk aan  $0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ$ . Hierin is  $t$  de leeftijd van het beschouwde grondvlak of de jaarring en wordt  $r(u;t)$  berekend met behulp van formule (7).

De procentische fout op dit gemiddelde voor een leeftijd  $t$ , wordt bepaald aan de hand van de uitdrukking :

$$\begin{aligned} E\bar{r}(t) &= \frac{\bar{r}(t) - r(e;t)}{r(e;t)} 100 \\ &= \left( \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{u=n} \frac{e(t) \cos \theta + \sqrt{e^2(t) \cos^2 \theta - (\cos^2 \theta + V^2(t) \sin^2 \theta) (e^2(t) - V(t))}}{\cos^2 \theta + V^2(t) \sin^2 \theta} - 1 \right) 100 \\ &\quad \text{met } \theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ \\ &\quad n = 12 \end{aligned} \tag{9}$$



De invloed van  $V$  en  $e$  op de procentische fout op de gemiddelde straal  $\bar{r}(t)$  wordt duidelijk aangetoond in figuur 5. Voor  $V$  gelijk aan 1 wordt een gemiddelde straal berekend die steeds te klein is t.o.v. de representatieve straal. Bij  $V$  groter dan 1 is de toestand echter verschillend naargelang de  $e$ -waarde onder of boven 0.1 gelegen is. In het eerste geval zijn de fouten vrij gering en wordt een iets te grote straal berekend; een toenemende waarde van  $V$  heeft hierbij een stijgende fout voor gevolg. In het tweede geval (bij  $e$  groter dan 0.2) liggen de verhoudingen precies omgekeerd: de gemiddelde stralen zijn nl. te klein en dit verschijnsel neemt toe naarmate  $V$  naar 1 nadert en  $e$  groter wordt.

Naast de gemiddelde straal is het ook interessant na te gaan hoe de spreidingen op hoger berekende gemiddelden verlopen in functie van dezelfde parameters.

Stellen we deze spreiding voor door het symbool  $S\bar{r}(t)$  dan is :

$$S\bar{r}(t) = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{u=12} (\bar{r}(t) - r(u;t))^2}{n-1}}$$

met  $n = 12$

$u = 1, 2, \dots, 12$

Om het algemeen verloop van de spreiding onafhankelijk van het gemiddelde te maken en een eenvoudige grafische voorstelling toe te laten, werd met de relatieve spreiding gewerkt. Deze relatieve spreiding  $SR\bar{r}(t)$  wordt berekend aan de hand van bovenstaande formule, na deling door de hierbij horende gemiddelde straal  $\bar{r}(t)$  en vermenigvuldiging met 100; wat onderstaande algemene formule oplevert :

$$SR\bar{r}(t) = \frac{100 \sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{n \sum_{u=1}^{u=n} r^2(u;t)}{\sum_{u=1}^{u=n} r(u;t)} - 1} \quad (10)$$

waarin  $r(u;t)$  uitgedrukt is in functie van  $\theta$ ,  $V(t)$  en  $e(t)$  (cfr. formule 7) en waarbij  $n$  gelijk is aan 12.

Figuur 6 geeft de grafische voorstelling van het verloop van deze relatieve spreiding in functie van  $V$  en  $e$ . Hieruit blijkt het nogal vrij lineair verband tussen  $e$  en  $SR\bar{r}(t)$ . Enkel voor  $e$ -waarden gelegen tussen 0 en 0.125 is hierin een afwijking te bespeuren.

In dit gebied heeft de parameter  $V$  tevens een zekere invloed, alhoewel hij zeer gering blijft. Hij is van die aard dat bij toenemende waarde van  $V$  de relatieve spreiding eveneens groter wordt. Voor zeer grote waarden van  $e$  oefent  $V$  terug een merkbare invloed uit op de relatieve spreiding: bij grote  $V$ -waarden komen inderdaad kleinere relatieve spreidingen voor.

#### 4.3. Fout op de oppervlakte berekend met een straal $r(u; t)$ of $\bar{r}(t)$

Is  $O(u; t)$  de oppervlakte berekend aan de hand van de straal  $r(u; t)$  en  $\varepsilon r(u; t)$  de absolute fout op deze straal, dan geldt:

$$\begin{aligned} O_{(u;t)} &= \pi (r_{(e;t)} + \varepsilon r_{(u;t)})^2 \\ &= \pi r^2_{(e;t)} + 2\pi r_{(e;t)} \varepsilon r_{(u;t)} + \pi \varepsilon^2 r^2_{(u;t)} \end{aligned}$$

Omdat de laatste term meestal zeer klein is t.o.v. de twee voorgaande, kunnen we eveneens schrijven dat:

$$O_{(u;t)} \cong \pi r^2_{(e;t)} + 2\pi r_{(e;t)} \varepsilon r_{(u;t)}$$

Wordt nu de absolute fout op het grondvlak  $O(u; t)$  voorgesteld door het symbool  $\varepsilon O(u; t)$  en de oppervlakte, berekend aan de hand van de representatieve straal door  $O(e; t)$ , dan wordt bovenstaande gelijkheid:

$$\begin{aligned} O_{(e;t)} + \varepsilon O_{(u;t)} &\cong \pi r^2_{(e;t)} + 2\pi r_{(e;t)} \varepsilon r_{(u;t)} \\ \varepsilon O_{(u;t)} &\cong 2\pi r_{(e;t)} \varepsilon r_{(u;t)} \end{aligned}$$

waarin aldus het verband tot uitdrukking wordt gebracht tussen de absolute fout op de straal en de absolute fout op het grondvlak.

De procentische fout  $Er(u; t)$  op de straal  $r(u; t)$  wordt nu berekend als volgt:

$$\begin{aligned} Er_{(u;t)} &= \frac{r_{(u;t)} - r_{(e;t)}}{r_{(e;t)}} 100 \\ &= \frac{\varepsilon r_{(u;t)}}{r_{(e;t)}} 100 \end{aligned} \quad (11)$$

De procentische fout  $E0(u; t)$  op het grondvlak berekend met de straal  $r(u; t)$  wordt:

$$\begin{aligned} E0_{(u;t)} &= \frac{\pi r^2_{(u;t)} - \pi r^2_{(e;t)}}{r^2_{(e;t)}} 100 \\ &= \frac{2\varepsilon r_{(u;t)}}{r_{(e;t)}} 100 \end{aligned} \quad (12)$$

Uit de gelijkheden (11) en (12) vindt men uiteindelijk dat:

$$E0_{(u;t)} = 2 Er_{(u;t)} \quad (13)$$

Praktisch komt het hierop neer de procentische fout op de straal in functie van  $V$ ,  $e$  en  $\theta$  (zie figuur 4) gewoon met twee te vermenigvuldigen om de procentische fout op de met deze straal berekende oppervlakte terug te vinden.

Een analoge redenering voor de gemiddelde straal  $\bar{r}(t)$  met een procentische fout  $E\bar{r}(t)$ , levert een fout op de hiermee berekende oppervlakte, die eveneens gelijk is aan tweemaal de procentische fout op de gemiddelde straal van het beschouwde grondvlak. De procentische fouten op de oppervlakten berekend aan de hand van gemiddelde stralen (cfr. par 42) in functie van  $V$  en  $e$ , kunnen bijgevolg uit de figuur 5 worden afgeleid door eenvoudig de aangegeven waarden in de ordinaat te verdubbelen.

#### 4.4. Ligging van de representatieve straal

Naast het berekenen van fouten die ontstaan bij meting van een of meerdere stralen, is het ook interessant even na te gaan waar de representatieve straal kan worden teruggevonden op het grondvlak.

Vermits hoger reeds aangetoond werd dat de waarde van de representatieve straal  $r(c; t)$  gelijk is aan de vierkantswortel uit het produkt van  $a(t)$  en  $b(t)$ ; volstaat het deze waarde in de basisformule te substitueren en ze vervolgens naar  $\theta$  op te lossen.

Wordt de ligging van de representatieve straal op een ogenblik  $t$ , aangeduid door het symbool  $\theta(c; t)$ , dan is :

$$\theta_{(c;t)} = \arccos \left( \frac{-c(t)}{1 - V^2(t)} + \sqrt{\frac{e^2(t) V^2(t)}{(1 - V^2(t))^2} + \frac{V(t)}{V(t) + 1}} \right)$$

met  $c(t) \leq 0$   
 $V(t) > 1$

(13)

Deze formule geeft dus voor elk stel parameterkombinaties de richting aan onder dewelke de representatieve straal in het eerste ( $\theta$ ) of vierde ( $360^\circ - \theta$ ) kwadrant gelegen is. De oplossingen waarbij de ligging van de representatieve stralen in het tweede of derde kwadrant gelegen zijn, werden eenvoudigheidshalve achterwege gelaten, omdat er voor een groot aantal in de praktijk voorkomende kombinaties van  $V(t)$  en  $e(t)$ , geen representatieve stralen in deze kwadranten voorkomen. Verder is het van belang aan te stippen dat voor  $V(t)$  gelijk aan 1, de noemer  $1 - V^2(t)$  nul wordt, wat voor gevolg heeft dat de ligging van de representatieve straal voor een cirkelvormig grondvlak, niet rechtstreeks met bovenstaande formule kan berekend worden. Met behulp echter van de regel van de

L' Hospital, bekomt men voor het geval van de cirkel ( $V(t) = 1$ ) dat :

$$\theta_{(c;t)} = \arccos \left( - \frac{e(t)}{2} \right) \quad (13')$$

Figuur 7 geeft een overzicht van de ligging (in het eerste kwadrant) van de representatieve straal in functie van de parameters  $e$  en  $V$ . Hierbij dient opgemerkt dat in het geval  $V$  gelijk aan 1, de hoek  $\theta (c; t)$  naar  $90^\circ$  streeft wanneer  $e$  nul nadert. In werkelijkheid komt zulks hierop neer dat in het geval van een cirkelvormig grondvlak met  $e$  gelijk aan nul, elke richting representatief is, daar boomcentrum en meetkundig centrum samenvallen.

Bij  $V$  groter dan 1 en voor het gebied van  $e$  gelegen tussen 0 en 0.2 nadert de hoek  $\theta (c; t)$  vrij snel naar  $90^\circ$  wanneer  $e$  toeneemt. De invloed van  $V$  is in dit gebied eveneens zeer groot, maar het effect ligt precies andersom. Bij waarden voor  $e$  groter dan 0.2 verandert de hoek  $\theta (c; t)$  relatief weinig, om uiteindelijk bij verdere toename van  $e$  terug te gaan dalen. In dit gebied blijft de hoekwaarde dalen bij toenemende  $V$ -waarde, maar ook hier wordt het effect ervan evenwel geringer naarmate  $e$  groter wordt.

## 5. Besluiten

Als we enerzijds aannemen dat het grondvlak van een boom zeer goed door de ellipsvorm wordt benaderd, en anderzijds uit metingen weten dat de extreme waarden voor de parameters  $V$  en  $e$  voor een hele reeks boomsoorten respectievelijk bij 1,15 en 0,200 gelegen zijn, kunnen uit deze theoretische berekeningen enkele praktische konklusies worden getrokken.

Wanneer bvb. een willekeurige straalmeting wordt verricht op een grondvlak of aan een boorspaan, uitgaande van de verkeerde veronderstelling dat het hier om een cirkelvormig grondvlak gaat waarvan zelfs het bestaan van een excentriciteit niet wordt vermoed, zal de procentische fout op deze meting kunnen gelegen zijn tussen + 30 % en - 20 %. De fout op de met deze straal berekende oppervlakte zal bijgevolg een waarde bereiken gaande van + 60 % tot - 40 %.

Enkel toepasselijk op de stamschijf is het meten van een zeker aantal stralen waarvan het gemiddelde wordt berekend. Is dit gemiddelde het resultaat van straalmetingen, gelegen op een onderlinge afstand van  $30^\circ$ , dan zal de procentische fout schommelen tussen  $\pm 1$  %; wat voor de oppervlakte overeenstemt met  $\pm 2$  %. De relatieve spreiding op die gemiddelde stralen zoals berekend met formule (10), zal ten hoogste 18 bedragen.

Tot slot kan ook nog bij hoger vermelde grenswaarden voor de parameters  $V$  en  $e$  de ligging, in het eerste of vierde kwadrant, van de representatieve straal worden nagegaan. Bij  $V$  groter dan  $1$ , kan deze representatieve straal zowel links of rechts van de maximum straal worden teruggevonden, bij een hoekwaarde gelegen tussen  $43^\circ$  en  $80^\circ$ . Voor  $V$  gelijk aan  $1$  is dit bereik veel kleiner en strekt zich enkel uit tussen  $85^\circ$  en  $90^\circ$ .

#### LITERATUUR

1. GOOSSENS R. — « Studie van de vorm, de oppervlakte en de groei van het grondvlak, in het bijzonder bij *Pinus nigra var. calabrica* SCHN. ». Proefschrift tot het bekomen van de graad van Doctor in de Landbouwkundige Wetenschappen aan de Rijkslandbouwhogeschool te Gent — 1965.
2. MATERN, B. — « On the geometry of the cross-section of a stem ». Medd. fran Statens Skogsforsokanstalt — Bd 46 nr 11 (1956).
3. MATTERN, B. — « Spatial Variation ». Medd. fran Statens Skogsforsokanstalt — Bd 49, nr 5 (1960).
4. MÜLLER, G. — « Untersuchungen über Querschnittformen der Baumstäbe ». Forstwissenschaftliche Centrallblatt — Bd 76, nr 1/2 (1957).
5. SIOSTRZONEK, E. — « Radialzuwachses und Flächenzuwachs ». Forstwissenschaftliche Centrallblatt — Bd 77, nr 7/8 (1958).

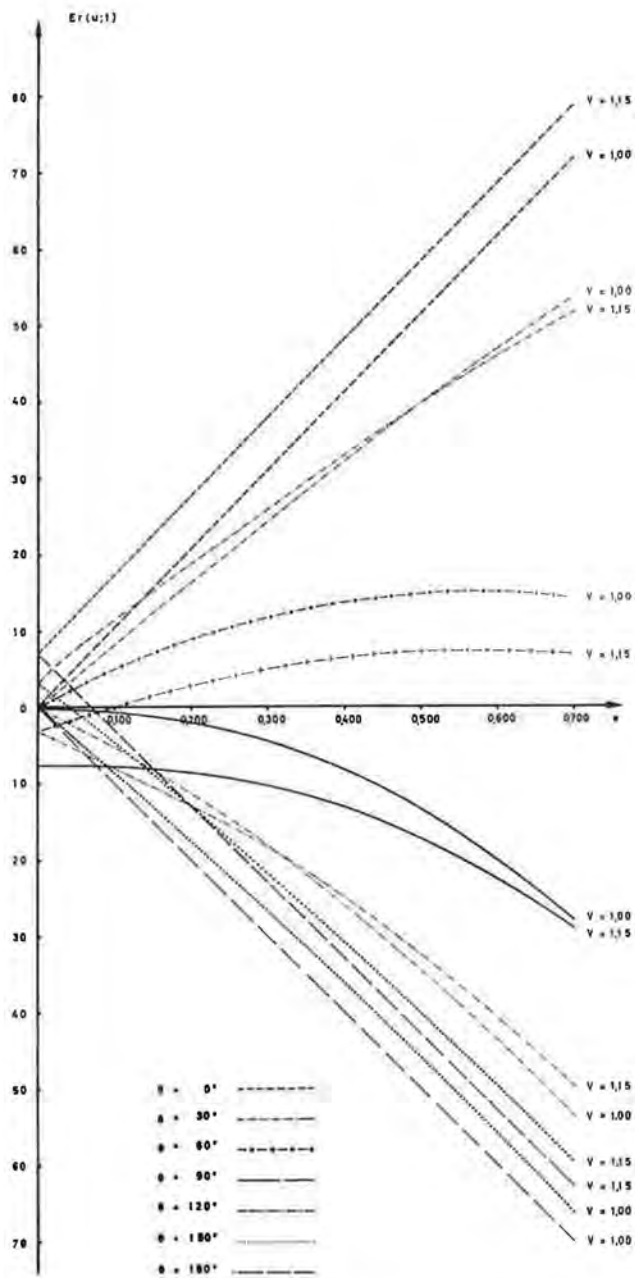


Fig. 4. Procentische fout  $E_r(u; t)$  op een willekeurige straal  $r(u; t)$  in functie van de relative excentriciteit  $e$ , de vorm van het grondvlak  $V$  en de richting  $u$  of hoek  $\theta$  t.o.v. de maximum straal.

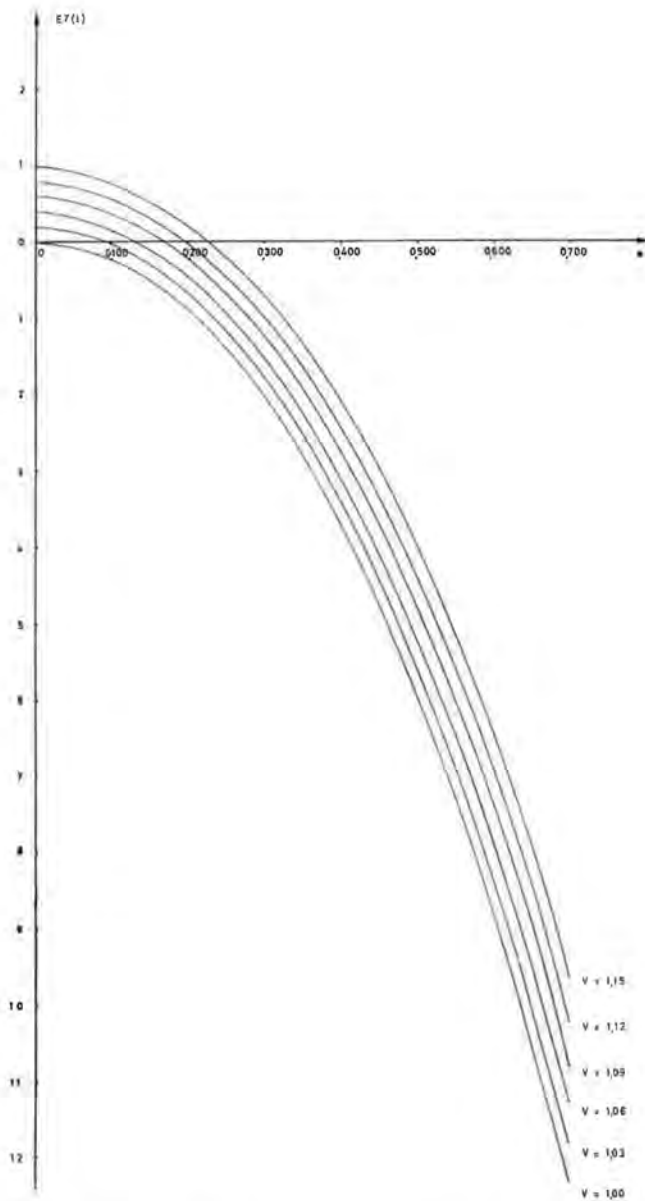


Fig. 5. Procentische fout  $E_r(t)$  op het gemiddelde van twaalf stralen gemeten met een onderlinge afstand van  $30^\circ$  in functie van de relatieve excentriciteit  $e$  en de vorm van het grondvlak  $V$ .

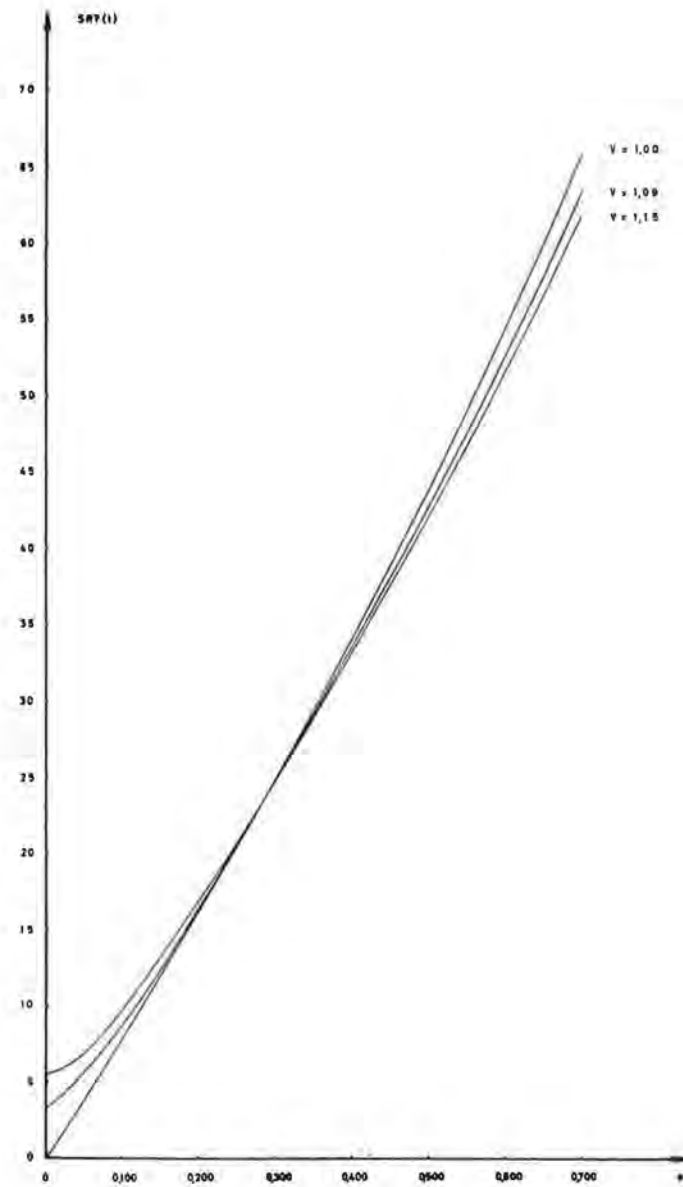


Fig. 6. Relatieve spreiding  $SRr(t)$  ( $\times 100$ ) op het gemiddelde van twaalf stralen gemeten met een onderlinge afstand van  $30^\circ$  in functie van de relatieve excentriciteit  $e$  en de vorm van het grondvlak.



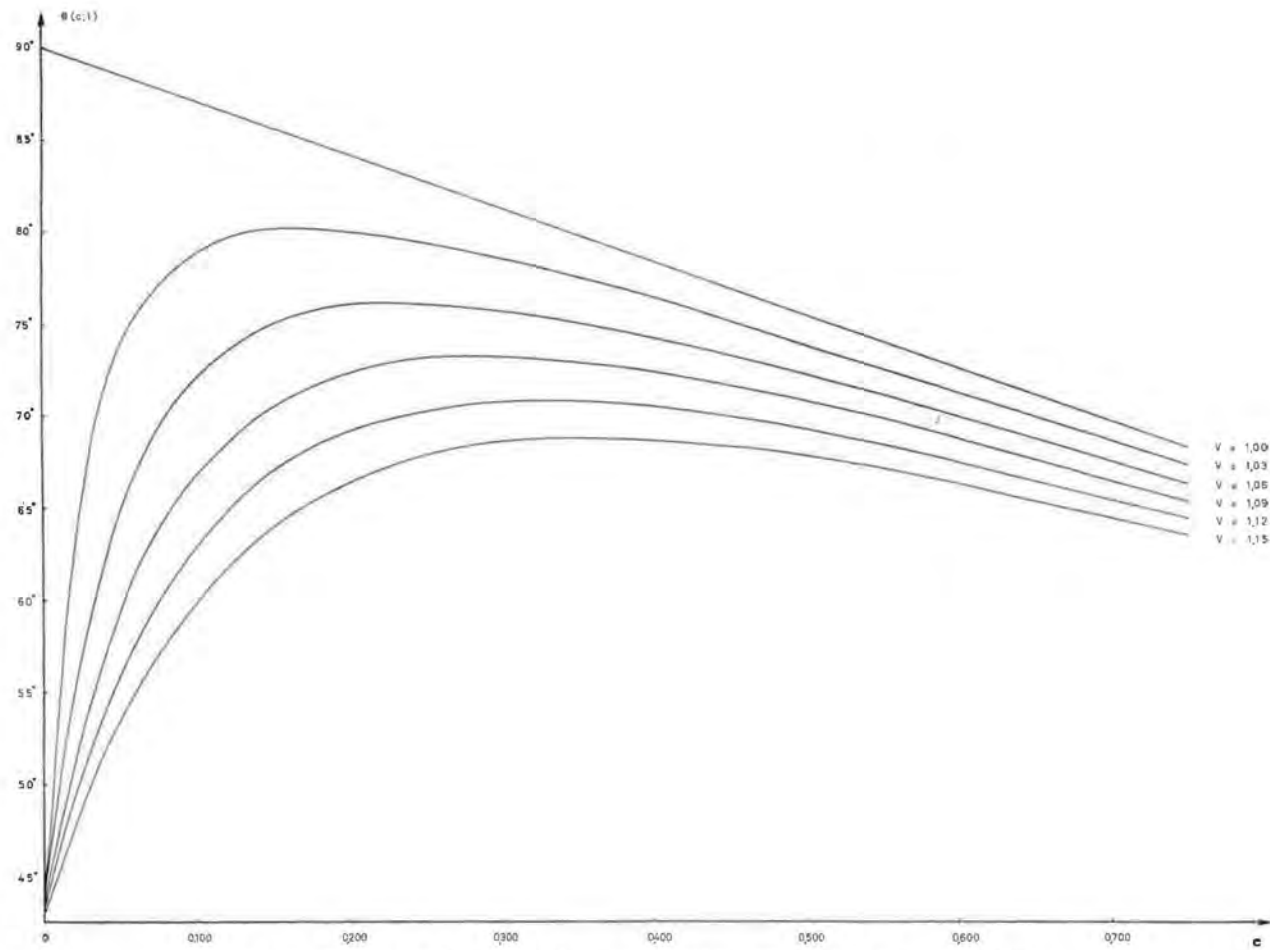


Fig. 7. Ligging  $(\theta(c; t))$  van de representatieve straal in het eerste kwadrant in functie van de relatieve excentriciteit  $e$  en de vorm van het grondvlak  $V$ .

## SAMENVATTING

In dit artikel werd uitgegaan van de veronderstelling dat het grondvlak het best door een ellips kon worden benaderd. Om op elk ogenblik de diverse karakteristieken van een gegeven grondvlak te kunnen weergeven, werden een drietal parameters ingevoerd.

Een eerste parameter ( $V(t)$ ) is een maat voor de vorm van het grondvlak op een ogenblik  $t$  en wordt berekend uit de verhouding tussen de grote ( $a$ ) en de kleine ( $b$ ) as van de ellips. Vermits in de praktijk het houtmerg van de stam-schijf (punt  $M$  in figuur 3) niet noodzakelijkerwijze samenvalt met het snijpunt  $O$  van de symmetrie-assen, moest een tweede parameter dit verschijnsel kunnen karakteriseren. De afstand tussen deze beide punten wordt excentriciteit genoemd en voorgesteld door het symbool  $x_0(t)$ . De derde en laatste parameter is een maat voor de grootte van het grondvlak op een ogenblik  $t$  en wordt representatieve straal genoemd ( $r(c; t)$ ). Het is de straal van een cirkel met zelfde oppervlakte als de beschouwde ellips.

Uitgaande van deze drie parameters werd een basisformule opgesteld voor het berekenen van een willekeurige straal  $r(u; t)$  in functie van de richting  $u$  of de hoek  $\theta$  t.o.v. de maximum straal (cfr. par. 3, formule 5). Omdat het effect van  $x_0(t)$  afhankelijk is van de grootte van  $r(c; t)$ , werd het begrip « relatieve excentriciteit  $e(t)$  » ingevoerd (cfr. formule 6); waardoor de basisformule haar definitieve vorm aanneemt (cfr. formule 7).

Met behulp van deze basisformule kan nu niet alleen de beschrijvende straal op een ogenblik  $t$  berekend worden in functie van  $V(t)$ ,  $e(t)$  en  $\theta$ ; maar kunnen eveneens een hele reeks afleidingen worden gemaakt. In dit artikel hebben we ons beperkt tot enkele ervan.

Een eerste mogelijke toepassing is het berekenen van de procentische fout  $Er(u; t)$  op een willekeurige straal  $r(u; t)$  in functie van  $V$ ,  $e$  en de ligging ervan t.o.v. de maximum straal (cfr. par. 41, formule 8). Het verloop van die fout in functie van hoger vernoemde parameters is voorgesteld in figuur 4.

In paragraaf 42 werd met behulp van de formule 8, de procentische fout  $Er(t)$  berekend op het gemiddelde van twaalf stralen, gemeten met een onderlinge afstand van  $30^\circ$  en in functie van de relatieve excentriciteit  $e$  en de vorm van het grondvlak  $V$ . De grafische voorstelling van dit verloop is weergegeven in figuur 5. In figuur 6 is het verloop van de relatieve spreiding  $SR_x(t)$  op hoger genoemd gemiddelde voorgesteld. Ter berekening van deze spreiding werd gebruik gemaakt van formule 10.

In paragraaf 43 werd aangetoond dat de hoger berekende procentische fouten enkel dienen verdubbeld, om de procentische fouten op de met deze stralen berekende oppervlakten van het grondvlak te kennen.

Tot slot werd de ligging  $\theta(u; t)$  van de representatieve straal nagegaan in functie van  $e$  en  $V$ . Het verloop hiervan werd berekend aan de hand van formule 13 en 13', en voorgesteld in figuur 7.

## SUMMARY

### Theoretical calculation of the systematic errors made during the determination of the basal area

To prove his point the author goes out from the supposition, that the best approximation for the basal area is an ellipse. Consequently three parameters are set up to reflect various characteristics of a given area at any moment. The first parameter ( $V(t)$ ) is a measure for the form of the basal area at a moment  $t$  and is calculated from the relation between the large ( $a$ ) and the small ( $b$ ) axis of the ellipse. The use of a second parameter was necessary as the biological growth-centre of the tree (point  $M$  in fig. 3) does not coincide in most cases with the intersection  $O$  of the axes of symmetry. The distance between both points ( $M$  and  $O$ ), represented by symbol  $x_0(t)$  is used as a measure for the real of the

stem dish eccentricity. The third parameter is a measure for the size of the basal area at a moment  $t$  and is called the representative radius ( $r(c; t)$ ). It is the radius of a circle with the same surface value as the considered ellipse.

Going out from these three parameters, a formula was worked out up to basically calculate any radius  $r(u; t)$  in function of the direction  $u$  or the angle  $\theta$  between this radius and the maximum radius (par. 3, form. 5) of any given stem dish. As the value of  $x_0(t)$  depends on the dimension of  $r(c; t)$ , the concept « relative eccentricity  $e(t)$  » is introduced (cfr. Form. 6) and it becomes thus possible to give the basic-formula a definitive form (cfr. form. 7).

By means of these basic-formula, it is not only possible to calculate the descriptive radius at a moment  $t$  in function of  $V(t)$ ,  $e(t)$  and  $\theta$ , but a lot of further deductions can also be made. A first possible application consists in the calculation of the procentual error  $Er(u; t)$  on any radius  $r(u; t)$  in function of  $V$ ,  $e$  and their position regarding to the maximum radius (cfr. par. 41, form. 8).

The evolution of this error in function of the mentioned parameters is given in fig. 4.

In paragraph 42, the procentual error is calculated from each other on average of 12 radii, measured at a distance of  $30^\circ$  (form. 8).

This is done in function of the relative eccentricity  $e$  and the form of the basal area  $V$ . The graphic representation of this calculations is given in fig. 5. In

fig. 6 the evolution of the relative distribution  $SR\bar{x}(t)$  on the mentioned average is given. To calculate this distribution, form. 10 was used.

Paragraph 43 proves that the mentioned procentual errors only need to be duplicated to know the procentual errors on the calculated surfaces of the basal area.

Finally, the position ( $\theta(c; t)$ ) of the representative radius has been verified in function of  $e$ , and  $V$  and his evolution studied by using the formula 13 and 13' (fig. 7).