

## DE VEROVERING VAN HET ONEINDIGE OF HET ELDORADO VAN DE MENSELIJKE KENNIS\*

*Jean Paul Van Bendegem*

### I. Het oneindige en het oneindige

Het is een stilistisch banaal middel, maar wat ik bedoel met 'het oneindige en het oneindige' kan ik het best illustreren door de *Van Dale* te raadplegen.

"oneindig, bn. bw., geen einde hebbende, hetzij met betr. tot uitgestrektheid of tot veelvuldigheid ...; - (wisk. en nat. k.) grensbegrip, nl. de limiet waartoe een bepaalde grootheid nadert als een andere onbeperkt aangroeit; ...; - *de Oneindige, God; ...*"

Wat meteen opvalt aan deze (geselecteerde) bepaling is dat het oneindige zowel in een wiskundige-natuurkundige zin als in een totaal andere zin te begrijpen valt. Dat 'totaal andere' omvat onder andere het intuïtief aanvoelen van het oneindige, namelijk datgene wat we ons niet kunnen voorstellen, dat geen grens heeft, dat onbereikbaar is, enzovoort. Maar het omvat evengoed een metafysische invulling, in dit geval het goddelijke. Het lijkt mij een evidentie dat deze twee betekenisgroepen, in eerste instantie, met elkaar niets te maken hebben. Om het sterk uit te drukken, wat heeft de angst van Blaise Pascal voor het oneindige — "Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie" (*Les Pensées*, nr. 91) — te maken met het oneindig doortellen van de wiskundige : 1, 2, 3, ... ? Wat heeft de oneindige goedheid of oneindige kennis van God te maken met het bestaan van twee asymptoten voor de hyperbolische functie ? Zo geformuleerd, moet het antwoord zijn : niets. Om dit onderscheid duidelijk in gedachten te houden, zal ik spreken over W-oneindig (F-oneindig) voor het wiskundig (natuurkundig) oneindige en over M-oneindig voor het metafysische oneindige waartoe ik ook de intuïtieve invulling van het begrip reken.

In deze terminologie, laat het bovenstaande zich als volgt samenvatten : W-oneindig/F-oneindig en M-oneindig hebben met elkaar niets te maken.

Ik heb, denk ik, voldoende sterk benadrukt dat dit een eerste indruk is. Er volgt niet uit dat ze *noodzakelijk* niets met elkaar te maken hebben. Bedoeling van deze tekst is trouwens de volgende bewering aan te tonen : de geschiedenis van

de Westerse cultuur is op te vatten als de gestadige eliminatie van het M-oneindige ten voordele van het W-oneindige en het F-oneindige.

Men kan terecht opmerken dat ik hier een grote sprong maak van het beperkte domein van de wis- en natuurkunde naar de gehele cultuur. Waarom zou een evolutie binnen een bepaald gedeelte van het menselijk denken te veralgemenen zijn tot de cultuur als geheel? Heb ik niet de verplichting aan te tonen dat deze extrapolering toegelaten is? Ik wil inderdaad betogen dat dit niet overdreven is. Indien ik spreek van een 'verovering van het oneindige' dan heb ik bewust de connotaties op het oog van het begrip 'verovering' die te maken hebben met het zich toeëigenen van vreemd land. Meer zelfs: een toeëigenen dat men kan en wil rechtvaardigen. Want impliciet, is er ook de overtuiging dat men moreel juist handelt.

Maar, net zoals de materiële veroveringen op een zware kater zijn uitgelopen, wil ik ook verdedigen dat de intellectuele verovering van het oneindige in de wiskunde op een fiasco is uitgelopen. Is niet iedereen bereid deze sterke formulering te verdedigen, men is het zeker eens met de meer bescheiden bewering dat het W-oneindige een moeilijk te vatten 'ding' is. Wat doet men na een dergelijk fiasco? Een minderheid waartoe ik mezelf reken, wil de strijd staken. Wat men wou veroveren bleek niets anders dan het goudland te zijn, of, anders gezegd, een hersenschim, een illusie. Maar een meerderheid wil een tweede aanval ondernemen. Althans, zo interpreteer ik de recente 'revival' die we op dit ogenblik meemaken, niet in de wiskunde, maar in het maagdelijk nog-niet-ingepalmde terrein van de natuurkunde.

Wat zich hier afspeelt in het domein van de wis- en natuurkunde, kan zonder probleem in een bredere context worden geplaatst. Wordt de eerste veroveringsgolf gelijkgesteld met het modernisme, dan bevinden we ons nu in de post-moderne fase. Niemand zal dit in twijfel trekken. Maar hoe reageert men hierop? Ofwel ontkent men dat het modernistisch programma voorbij is zoals bijvoorbeeld Stephen Toulmin in *Kosmopolis* verdedigt. Toegegeven, aandachtspunten moeten verschoven worden, accenten verplaatst, maar de exploratie moet verder gaan. Ofwel neemt men afstand. Het is niet mijn bedoeling hier een evaluatie te geven van de post-moderne houding. Laat ik mij beperken tot de volgende relevante commentaar. Kritiek op het modernisme impliceert geenszins de ontkenning van een *grand récit*. De mogelijkheid blijft open voor een *grand récit modest*. De lezer zou kunnen denken dat ik pleit voor een post-modernisme in de wiskunde (zo dit betekenis heeft!). Dat ik pleit voor een uiteenbrokkelen van de wiskunde in *petits récits*. Dat is niet zo. Voor wie van paradoxen houdt, waar ik naartoe wil, is een post-modernistisch modernisme: een bescheiden groot verhaal.

In deel II wordt de eerste veroveringsgolf in de wiskunde geschetst, gevolgd door III waarin de elementen worden weergegeven die tot het fiasco hebben bijgedragen. De tweede golf is het onderwerp van IV en in V tenslotte wordt het 'bescheiden' programma geformuleerd.

## II. Beknopte geschiedenis van de eerste verovering

Ik heb niet de bedoeling hier de geschiedenis van de wiskunde weer te geven. Deze onmogelijke opdracht zal ik opvangen door geselecteerde momenten te belichten. Deze werkwijze heeft zijn evidente beperkingen, maar ik mag de lezer verwijzen naar de referenties aan het einde van deze tekst, het boek van Moore in het bijzonder, voor een meer gedetailleerde invulling van mijn beweringen.

### 1. Eerste verkenning van het terrein

Men leest al te vaak dat het aan de Griekse wiskundigen (in zo verre deze titeltoekenning een betekenis heeft, uiteindelijk is de term 'wiskunde' bedacht door Simon Stevin in de zestiende eeuw) toekomt als eersten het oneindigheidsconcept wiskundig ingevuld te hebben. Niets is minder waar. Het volstaat het basiswerk van de Griekse wiskunde, de *Elementen* van Euclides erop na te slaan om te zien dat de term 'oneindig' in geen enkele stelling of bewijs wordt vermeld. Wat wél wordt aangetoond is dat bijvoorbeeld het aantal priemgetallen een niet-begrensde verzameling vormt, maar dat is iets helemaal anders dan beweren dat ze oneindig groot is<sup>1</sup>. Een meetkundig punt wordt niet bepaald als een oneindige kleine entiteit, een punt is *dat wat geen verdere delen heeft* (Boek I, definitie 1). Als het delingsproces niet meer verder kan, dan heb je met een punt te maken. Bemerkt dat deze bepalingen negatief zijn. Oneindig is datgene waar een bepaalde eigenschap niet meer van toepassing is. Aan de ene kant is dit te interpreteren als een duidelijke afscheiding tussen het W- en het M-oneindige. Maar, aan de andere kant, is het wel zo dat het wiskundig materiaal wordt aangebracht om het oneindige te mathematiseren. Er valt geen betere illustratie hiervoor te bedenken dan de redenering van Zeno<sup>2</sup> voor het aantonen van de ondeelbaarheid van de ruimte. De versie die ik hieronder presenteer, is een moderne weergave die een vereenvoudiging is van de oorspronkelijke redenering.

De redenering van Zeno verloopt als volgt :

(a) Stel dat de ruimte deelbaar is. Dan is de ruimte ofwel eindig deelbaar, ofwel oneindig deelbaar.

(b) In het eerste geval volgt een onmogelijkheid. Aangezien de ruimte een uitgebreidheid bezit, en een eindige deling steeds delen met een uitgebreidheid oplevert, zal na een eindig aantal delingen het nog steeds mogelijk zijn verder te delen. Dus kan de ruimte niet eindig deelbaar zijn.

(c) In het tweede geval volgt eveneens een onmogelijkheid. Want, indien de ruimte oneindig deelbaar is, dan is beweging onmogelijk. Wil een object van A naar B bewegen, dan moet eerst de halve afstand van A naar B worden afgelegd. Dit is slechts mogelijk indien de halve afstand daarvan wordt afgelegd. Deze redenering kan *ad infinitum* herhaald worden, zodat het object nooit kan vertrekken uit A. Wat onmogelijk is.

(d) Conclusie : aangezien de ruimte noch eindig, noch oneindig deelbaar is, is ze ondeelbaar en één.

Het meest opvallende in deze prachtige gedachtengang is de merkwaardige versmelting van een wiskundige benadering — de deling is een typisch mathematische aangelegenheid — en van een metafysische stelling, namelijk de ondeelbaarheid van de ruimte. Hier is zeker nog geen sprake van een 'verovering' maar er is, wat ik zou noemen, een 'binnentreden' van het terrein.

Maar binnentreden is nog geen verovering. Het is verrassend vast te stellen hoe moeizaam de ontwikkeling van het W-oneindige is verlopen. Tot in de Renaissance (en zelfs later) blijft het ophelderen van het mathematisch oneindige een moeilijk probleem. Laat ik een typische positie weergeven. Galileo Galileï verdedigt dat het enige dat over het oneindige te zeggen valt, is dat het bestaat. Maar, zijn voornaamste argument is van *mathematische* aard. Het loopt als volgt :

Bekijk de verzameling van natuurlijke getallen : 1, 2, 3, ...

Een deel van deze verzameling wordt gevormd door de kwadraten : 1 (=1<sup>2</sup>), 4 (=2<sup>2</sup>), 9 (=3<sup>2</sup>), ... Stel nu de vraag : hoeveel kwadraten zijn er ? Twee elkaar tegensprekende antwoorden zijn mogelijk :

(a) Aangezien niet alle natuurlijke getallen kwadraten zijn — er is geen getal waarvan 5 het kwadraat is — zijn er zeker minder kwadraten dan natuurlijke getallen.

(b) Met elk natuurlijk getal  $n$  komt één kwadraat overeen, namelijk  $n^2$ , bovendien komt met elk kwadraat  $n^2$  één natuurlijk getal overeen, namelijk  $n$ . Maar dit betekent dat er evenveel natuurlijke getallen als kwadraten zijn.

De conclusies van (a) en (b) spreken elkaar lijnrecht tegen. Men zou, terecht, de indruk kunnen hebben dat de verovering een bij voorbaat mislukte onderneming moet zijn. Maar dit is, vreemd genoeg, niet het geval. Wiskundigen, na Galileï, hebben geprobeerd zo goed en zo kwaad als het kon, te werken met het begrip oneindig. Beter is het te spreken van wiskunst en niet wiskunde. Het gegoochel met oneindig kleine grootheden — de beroemd-beruchte infinitesimalen<sup>3</sup> — waar

Isaac Newton en Gottfried Wilhelm Leibniz op een handige manier wisten mee om te springen, bracht een filosoof als George Berkeley ertoe dit concept te ridiculiseren door te spreken van 'ghosts of departed quantities'. Maar de kritische filosofen in de marge daargelaten, werd de kunst van generatie op generatie doorgegeven. Het zou uiteindelijk Pierre-Simon Laplace toelaten een mechanica van de hemellichamen op te stellen die een volledige beschrijving leek te geven van wat er zich in het bovenmaanse afspeelde. Meer zelfs, bij Laplace neemt deze hybride een precieze vorm aan. Niet zonder toeval, de vorm van een demon.

## 2. *Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse*

Een intelligentie die op een gegeven moment alle krachten werkzaam in de natuur en de posities van de dingen die de natuur samenstellen zou kennen, die bovendien voldoende omvangrijk zou zijn om al deze gegevens aan een analyse te onderwerpen, zo'n intelligentie zou in één enkele formule de bewegingen vastleggen zowel van de grootste lichamen in het universum als van het lichtste atoom : niets zou voor haar onzeker zijn, toekomst en verleden zouden haar voor de ogen staan. De menselijke geest, in de perfectie die hij heeft bereikt in de astronomie, laat een zwakke afbeelding zien van deze intelligentie.

Deze korte passage vormt werkelijk een sleutel tot het 'mechanische' denken. Ik hoef gelukkig niet de fysische details te specificeren. Veeleer wil ik de aandacht vestigen op twee punten :

(a) De demon — Laplace spreekt van een 'intelligence' — heeft goddelijke eigenschappen. Door kennis te hebben van één enkel bepaald moment, bezit de demon kennis van het gehele universum. Indien we voor dit éne moment het ogenblik van de schepping nemen, dan heeft de demon, net zoals God, volledige kennis van het universum. De demon heeft geen tijdsbesef. Aangezien heden, verleden en toekomst alle direct toegankelijk zijn, kan de demon geen onderscheid meer maken tussen nu, toen en wat komt. De demon, net zoals God, bevindt zich buiten de tijd. De schepping van de demon kent een noodzakelijke afwikkeling — alles is vooraf bepaald — wat ook vaak als een goddelijke eigenschap wordt gezien.

(b) Daartegenover staat de laatste zin van het citaat. Hier wordt gesteld dat de mens een benadering, zij het weliswaar een zwakke benadering, is van de demon.

De combinatie van (a) en (b) zegt dus het volgende : de mens is niet de demon, maar beiden zijn vergelijkbaar. Er is één schaal waarop de mens en de demon een plaats vinden. Indien we de demon als de W-God<sup>4</sup> zien, dan betekent dit, met

andere woorden, dat de afstand tussen mens en W-God overbrugbaar is. En de M-God dan ?

Er is een beroemde anekdote over Laplace. Wanneer hij aan Napoleon zijn mechanica had uitgelegd, vroeg de keizer waarom God in zijn theorie niet voorkomt. Het antwoord van Laplace was : "Je n'avais pas besoin de cette hypothèse". Los van het feit dat dit verhaal een mystificatie blijkt te zijn (zie Franssen), vindt iedereen het wel geloofwaardig. Laplace had dit best kunnen geantwoord hebben. De betekenis lijkt mij duidelijk : Napoleon vraagt waar de M-God een plaats vindt. Laplace antwoordt : geen. Binnen de menselijke opvattingen over wat het universum is, hoe het tot stand gekomen is, hoe het gekend kan worden, is plaats voor een mathematische God, die met de metafysische God geen uitstaans heeft. De mathematisering van de natuur heeft God verdrongen, sterker, vervangen door een mathematische analogon waarmee de mens zich kan vergelijken.

Deze visie is des te merkwaardiger, omdat het wiskundig apparaat dat de vergelijking moest mogelijk maken, nog helemaal niet op punt was gesteld. De moeilijkheden met het mathematisch oneindige stapelden zich verder op toen in de tweede helft van de negentiende eeuw de situatie zodanig ontspoorde dat een hernieuwde studie van het oneindige noodzakelijk werd. Onder alle wiskundigen-filosofen die zich op dit probleem gestort hebben, neemt Georg Cantor de belangrijkste plaats in.

### 3. *Het paradijs herschape*

Georg Cantor mag beschouwd worden als de grondlegger van het moderne denken over het begrip oneindigheid in mathematische zin. De belangrijkste vaststelling van zijn studie is dat het oneindige niet uniek is. Er is niet één oneindigheid, er is sprake van *een oneindigheid van oneindigheden*. Zonder in technische details te treden, laat ik toch proberen de basisgedachtengang te illustreren opdat de lezer enige betekenis zou kunnen hechten aan het concept van meerdere oneindigheden.

Laat ons eerst een onderscheid invoeren tussen 'het aantal elementen in een verzameling' en 'hetzelfde aantal elementen in twee verzamelingen'. Neem bijvoorbeeld de natuurlijke getallen  $N$ . Het aantal elementen is oneindig, laat ons dit voor de duidelijkheid oneindig $1$  noemen. Dit is, in absolute zin, het aantal elementen. Hoe kunnen we nu uitmaken of een andere verzameling evenveel elementen bevat als  $N$  ? Eenvoudigweg, indien het mogelijk is een één-één-duidig verband op te stellen tussen  $N$  en de gegeven verzameling. De redenering van Galileï leidt niet meer tot een paradox, maar toont precies aan dat het aantal kwadraten eveneens oneindig $1$  is<sup>5</sup>. Dus kan de vraag worden gesteld : bestaan er

oneindige verzamelingen waar dit één-één-duidig verband niet bestaat? Indien ja, dan moeten we spreken van oneindig<sup>2</sup>. De doorbraak van Cantor bestond er precies in aan te tonen — wiskundig te bewijzen! — dat dit inderdaad zo is. Meer zelfs, de door hem gevonden methode, de zogenaamde diagonaal methode van Cantor — liet toe de vraag voor oneindig<sup>2</sup> opnieuw te stellen, wat aanleiding gaf tot oneindig<sup>3</sup>. Gevolg: een oneindigheid van oneindigheden.

Het is begrijpelijk dat wiskundigen diep onder de indruk waren van deze 'ontdekkingen'<sup>6</sup>. Een dergelijke totaal onverwachte structuur voor het oneindige gaf voedsel aan de gedachte dat hier een stuk wiskunde werd *ontdekt* en niet uitgedacht door de mens. Dit moest er zijn, het lag klaar voor ons om het te vinden. Het best werd deze appreciatie verwoord door de Duitse wiskundige David Hilbert die deze structuur het *paradijs* noemde dat *Cantor ons heeft geschonken*. Hilbert introduceerde dit beeld als antwoord op de critici van het oneindige, en hij voegde eraan toe: "Niemand zal ons verjagen uit dit paradijs".<sup>7</sup> Zou men kunnen twijfelen aan deze interpretatie van de woordkeuze van Hilbert, dan is de situatie wat Cantor betreft absoluut duidelijk. In zijn geschriften is de theologie expliciet aanwezig.

Herhaaldelijk in teksten en in brieven, wordt God aangehaald als noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van de oneindigheid van alle oneindigheden. Of, als inspiratiebron. Het nadenken over het goddelijke bracht Cantor tot zijn inzichten. Het is dan ook geen overdrijving te spreken van een theologie van het oneindige. Een verdere illustratie zo dit nog nodig is. Zodra men erover nadenkt, wordt het snel duidelijk dat er iets paradoxaals is met de notie van de *oneindigheid* van oneindigheden. Welke oneindigheid is dat dan? Dat er op deze vraag geen consistent antwoord mogelijk was, was een bevestiging voor Cantor dat alleen God het vermogen bezat het mathematisch oneindige in zijn geheel te overschouwen.<sup>8</sup>

De conclusie is duidelijk: de studie van de oneindigheid in *wiskundige* zin laat toe te komen tot een beschrijving, zelfs tot een begrijpen van het goddelijke. Met andere woorden het wiskundig oneindige vult het metafysisch oneindige. De vervanging van de M-God door een W-God is voltooid. Hiermee is de eerste verovering tot een eind gekomen. De (mathematische) stellingen zijn ingenomen. Maar, in tegenstelling tot het oorspronkelijke paradijs, kwam er relatief snel verandering in de situatie. De verovering hield niet stand.

### III. Teken van mislukking

Hoewel ik in vorige paragraaf beweerde dat de mathematische stellingen waren ingenomen, is dit maar ten dele waar. In termen van de veroveringsmetafoor die de uiteenzetting in deze tekst structureert, is één van de belangrijkste

stappen die men moet ondernemen na een verovering, het in kaart brengen van het ingenomen gebied. Met andere woorden in mathematische termen, Cantor had de poort van het paradijs geopend, de eerste stappen gezet, maar de 'grote opdracht' kon nu pas goed beginnen : het tekenen van de volledige kaart. Maar hier begonnen de problemen pas goed. En wel op twee vlakken. Het eerste kunnen we ons nog voorstellen, het tweede tart werkelijk de verbeelding.

Wat het eerste betreft, zal het niemand verbazen indien ik zeg dat een kaart samenstellen, een langdurige arbeid is. Het gebied zelf moet namelijk volledig uitgekamd worden, een lastige en tijdrovende bezigheid. Bovendien moet men rekening houden met de mogelijkheid dat de beschikbare middelen ter exploratie niet volstaan om bepaalde aspecten van het gebied te beslechten. Deze praktische overweging sluit natuurlijk niet uit dat we ons kunnen *voorstellen* dat we *principiëel* de zaak zouden kunnen oplossen. Zoals men kan vermoeden was dit precies de situatie met het paradijs van Cantor. Een groot aantal vragen bleef onbeantwoord waarvan men nochtans dacht dat ze principiëel beantwoordbaar waren. Bovendien bleken sommige vragen merkwaardig eenvoudig. Laat ik één voorbeeld geven. Indien we een oneindigheid van oneindigheden hebben, dan kan de volgende vraag gesteld worden : neem de eerste oneindigheid (van de natuurlijke getallen), wat is de *eerstvolgende* oneindigheid (indien die bestaat) ? Na jaren onderzoek, bleek het antwoord te zijn : de middelen die we hebben zijn ontoereikend. In mathematische termen : de wiskundige theorieën die we nu hebben, laten ons niet toe de vraag éénduidig te beantwoorden.

Het probleem dat zich aldus manifesteerde, was dat niet één kaart van Cantors paradijs mogelijk was, maar een hele atlas. Het leek erop dat het paradijs eerder een labyrint was zonder een unieke plattegrond. Dit onderzoek waarvan ik hier zeer schematisch verslag doe<sup>9</sup>, is nog steeds gaande. Met dit verschil dat een toenemend aantal wiskundigen en filosofen zich de vraag stelt of we de plattegrond wel echt nodig hebben. Uiteindelijk staan er dringender problemen voor de deur die met de onmiddellijke leefwereld te maken hebben en niet met een imaginair werelddeel dat meer op Atlantis lijkt dan op iets anders.

Wat het tweede vlak betreft, ligt de situatie helemaal anders. Het mag vreemd klinken, eigenlijk moet het vreemd klinken, maar probeer u voor te stellen dat een bepaald gedeelte van het gebied niet in kaart kan worden gebracht, *ongeacht de middelen die men aanwendt*. Vooral dit laatste gegeven is van belang. Het probleem is niet dat men aan grotere machtontplooiing moet doen, het probleem is dat *gelijk welke (menselijke) poging ook*, moet mislukken. In termen van de vorige paragrafen : zelfs *principiëel* is er geen antwoord mogelijk. Bovendien is het zo dat men dit kan *aantonen*. Het gaat dus niet om een vermoeden, om een indicatie van enigerlei soort, het is bewijsbaar het geval. In



mathematische termen heb ik het nu over de onvolledigheidsresultaten van Kurt Gödel.

Het is hier niet de plaats om uitvoerig in te gaan op deze fundamentele en wezenlijk belangrijke resultaten van Kurt Gödel<sup>10</sup>. Laat ik in alle bescheidenheid proberen de lezer een idee te geven van de gedachtengang die er de basis van vormt. De paradox van de leugenaar is ons allen bekend. Iemand zegt : 'Ik lieg'. Spreekt hij de waarheid ? Indien zo, dan is wat hij zegt, waar en dus liegt hij. Maar liegt hij, dan is zijn uitspraak een leugen, en dus is de ontkenning, namelijk 'ik lieg niet' waar, met andere woorden hij spreekt de waarheid. Een contradictie. Gevolg : men kan niet van gelijk welke uitspraak uitmaken of die waar is of vals. Niet alle uitspraken kunnen zonder meer geklasseerd worden onder de rubriek waar, of onder de rubriek vals. Het was Gödels geniale inval dezelfde redenering over te doen met 'bewijsbaarheid' in plaats van 'waarheid'. Gevolg : er moeten wiskundige uitspraken bestaan die principieel niet bewijsbaar zijn. Niet alles wat wiskundig het geval is, kan ook bewezen worden. Er blijven met andere woorden altijd 'gaten' in het geheel van onze wiskundige kennis. Of, algemener gesteld, niet alle (wiskundige) kennis is door de mens te achterhalen. De menselijke kennis is noodzakelijk onvolledig. Wat ik hier nu in een notedop heb weergegeven voor de wiskunde, geldt niet alleen voor dit domein maar, bij uitbreiding, ook voor die domeinen die zich van de wiskunde bedienen, met name vooral voor de natuurkunde, maar evengoed voor andere exacte wetenschappen<sup>11</sup>.

Gödels werk situeert zich in de dertiger jaren. Zestig jaar later, heeft men voldoende tijd gehad om tot een bezinning te komen. Sterk vereenvoudigd, ziet men twee reacties.

De eerste reactie is dat we het failliet, als dat het is, van de eerste verovering moeten nemen voor wat het is, maar dit hoeft niet te verhinderen dat we onze aandacht kunnen verleggen. Anders gezegd, het wiskundig terrein is niet het enige land om te veroveren. Misschien ligt er wel een nieuw Nirvana te wachten in de natuurkunde. In deel IV zal ik proberen aantonen dat een aantal auteurs inderdaad gelooft dat dit het geval is. Om mijn terminologie aan te houden, de opdracht is niet langer de M-God te vervangen door een W-God, de zoektocht is nu naar een F-God.

De tweede reactie is een oproep tot bescheidenheid. Onder diverse benamingen — intuitionisten, constructivisten, finitisten<sup>12</sup> — hebben filosofen en wiskundigen gezocht naar een inperking van de wiskunde waarin, op zijn minst, aan het oneindige een meer beperkte rol wordt toegekend. Sommige auteurs zijn zeer expliciet in hun filosofie, zoals bijvoorbeeld Erret Bishop<sup>13</sup> :

"... de klassieke wiskunde bestudeert bewerkingen die slechts uitvoerbaar zijn door God",

waaraan hij toevoegt :

"Zo God een eigen wiskunde heeft die moet worden uitgewerkt, dat Hij ze dan zelf uitwerkt".

In deel V zal ik kort ingaan op deze ontwikkeling. Het is evident dat het elimineren of reduceren van het oneindige in de wiskunde noodzakelijk voor gevolg heeft dat het W-oneindige zijn aanspraak verliest op 'overname' van het M-oneindige. Net zoals het veroveren en koloniseren in zijn letterlijke betekenis moreel afkeurenswaardig wordt bevonden, zien we ook in de wiskunde een afkeer voor het gebruik van het oneindige, waarvan ik durf beweren dat ze ook moreel gefundeerd is, getuige het citaat van Errett Bishop.

#### IV. Het in stand houden van een mythe

Maar, indien we toch een volledige theorie zouden ontdekken, dan moet die op termijn in grote lijnen begrijpbaar zijn voor iedereen en niet slechts voor een paar wetenschappers. Dan zullen we allemaal, filosofen, wetenschappers, en gewone mensen, kunnen deelnemen aan de discussie over de vraag waarom wij en het universum bestaan. En vinden we het antwoord, dan betekent dit de ultieme triomf van de menselijke rede — want dan kennen we de geest van God.

Behalve het onvoorstelbaar optimisme dat uit deze korte passage spreekt, is het meest verbazingwekkende dat hij geschreven is niet in de zeventiende of achttiende eeuw, maar in 1988 en dat de auteur niet Newton of Laplace is, maar één van de meest bekende hedendaagse natuurkundigen, Stephen Hawking. Om in alle eerlijkheid te spreken, ik vind deze tekst op het randje van het shockerende. Wat een arrogantie is hier aan het woord. Ik heb uiteraard bewust de sterkste passage gezocht die ik kon vinden, maar wat Hawking hier in alle openheid verkondigt, is impliciet aanwezig bij een resem auteurs die in de nieuwe ontwikkelingen binnen de natuurwetenschappen een weg menen te vinden naar de M-God toe. Ik denk hierbij aan auteurs zoals Gerard Bodifée, Jan van der Veken, Max Wildiers, Paul Davies, Fritjof Capra, Ilya Prigogine, tot op zekere hoogte Roger Penrose, en zovele anderen. Wat is de nieuwe boodschap die wordt verkondigd ?

In een slogan : de natuurkunde is op weg naar de totale beschrijving van het universum. De bouwstenen — quarks en leptonen — zijn min of meer bepaald, de krachten — gravitatiekracht, electromagnetische kracht, de zwakke en de sterke kernkracht — die de bouwstenen samenhouden zijn min of meer bekend. Men spreekt niet meer van de fundamentele theorie van de natuurkunde, zoals

Eddington het nog deed in 1946, maar men spreekt boudweg van *the theory of everything* (TOE). Ik zal voorbijgaan aan het feit dat hier impliciet de kennis van de natuurkunde als voldoende voor de kennis van alles wordt beschouwd. Deze verdoken vorm van reductionisme verraadt reeds dat deze auteurs impliciet ervan overtuigd zijn dat alle menselijke kennis te herleiden valt tot een specifiek deeldomein, in dit geval de fysica. Maar dit is niet het belangrijkste.<sup>14</sup>

Indien we zouden beschikken over een (of moet het zijn, dé) 'TOE', dan zijn we in staat de geschiedenis van het universum over te doen. Hiermee bedoel ik dat het volgens de principes en wetmatigheden van de theorie mogelijk moet zijn in volle detail het ontstaan van het universum te simuleren. Ben ik aan het fantaseren? Is dit science-fiction? Zeker niet, aangezien de fysicus Steven Weinberg reeds een dergelijk boek heeft geschreven: *De eerste drie minuten*. En er wordt wel degelijk bedoeld: de eerste drie minuten van dit universum. We zijn, als het ware, getuigen van de creatie van dit universum.

Het volstaat nu de vraag te stellen: welke andere getuigen zijn er of zijn er geweest bij de creatie van het universum? Indien er een antwoord mogelijk is, kan het slechts één antwoord zijn: de (M-)God. Vandaar de uitspraak van Hawking: "We would know the mind of God". Bemerkt dat deze gedachte de demon van Laplace ruimschoots voorbijschiet. Voor Laplace is het al belangrijk dat de demon en de mens op een gemeenschappelijke lijn komen te staan, voor Hawking is het de *vervanging* van God door de mens. Zegt men niet vaak dat een tweede veroveringsgolf gewelddadiger uitvalt dan een eerste golf omdat men het failliet van die eerste golf in gedachten meedraagt?

Laat ik kort ook nog even aandacht besteden aan een meer bescheiden poging om een F-God te distilleren uit de bevindingen van de moderne natuurkunde. In tal van wetmatigheden komen constanten voor: de lichtsnelheid (essentieel voor de speciale en algemene relativiteitstheorie), de constante van Planck (essentieel voor de quantummechanica), de gravitatieconstante, de cosmologische constante, de constante van Hubble, de dichtheidsconstante van materie in het universum ... Deze constanten hebben bepaalde waarden. Het ligt voor de hand de vraag te stellen: waarom die waarden en geen andere? Waarom heeft de lichtsnelheid niet een waarde die het dubbele of de helft is van de gemeten waarde in dit universum? Bij de pogingen een antwoord te vinden, stelde men het volgende vast: indien voor bepaalde constanten een afwijkende waarde wordt gebruikt, dan vindt men een universum waarin menselijk leven (dat wil zeggen, leven gebaseerd op koolstof) niet voorkomt of kan voorkomen. Het is zeer aanlokkelijk dit idee te veralgemenen. Stel dat het zo is dat slechts als de constanten in de natuurwetten een heel wel bepaalde waarde hebben, dat leven in dit universum mogelijk is. Is het dan niet verleidelijk te antwoorden: *het*

*universum is zo ontworpen dat het ons mogelijk maakt. Anders gezegd, het universum is er voor ons. Het antropisch principe is geboren.*<sup>15</sup>

Zonder de bedoeling te hebben het denkwerk van deze auteurs in twijfel in het belachelijke te trekken, kan ik toch alleen maar vaststellen dat het argument op basis van het antropisch principe niets anders is dan een herformulering van het ontwerpers-argument (*argument by design*)<sup>16</sup>. Wie het binnenwerk van een uurwerk ziet, is meteen overtuigd dat dit geen produkt van het toeval is, maar het resultaat van een gepland proces, het ontwerp van een ontwerper. Dus is er een ontwerper. Kijk naar de indrukwekkende orde die in dit universum aanwezig is. Dit kan geen toeval zijn. Hier valt de hand van een ontwerper te herkennen. Dus is er een ontwerper — of moet ik schrijven een Ontwerper ?

Waarom ik mij zo druk maak over deze ontwikkeling ? Omdat ik ervan overtuigd ben dat de onderneming tot mislukken gedoemd is. Waarom denk ik dat ? Omdat de natuurkunde in de taal van de wiskunde is uitgedrukt en derhalve alle problemen in de wiskunde worden overgeheveld naar de natuurkunde. Laat ik dit concreter invullen. In het vorige deel heb ik vermeld dat er niet een unieke kaart bestaat van het paradijs van Cantor. Maar de natuurkunde heeft een kaart nodig. Er zullen dus zoveel 'natuurkundes' zijn, als er kaarten voor het paradijs zijn. Geen kaart is beter dan een andere kaart, dus hebben we geen reden de ene boven de andere te verkiezen. Een ondersteuning voor deze bewering is dat in het werk van de auteurs aangehaald in dit deel, elke verwijzing naar de resultaten van Gödel ontbreekt. Ik moet ruimte laten voor uitzonderingen — de meest markante is Roger Penrose — maar ook in dit geval doen ze niets anders dan de regel bevestigen<sup>17</sup>. Het lijkt bizar, maar men heeft onmiskenbaar de indruk dat de tweede golf verkiest (ik wil in het midden laten, bewust of onbewust) het mislukken van de eerste golf volkomen te negeren. Een, naar mijn mening, tot mislukken gedoemde strategie.

## V. Droombeelden zijn wat ze zijn : droombeelden

Een eenvoudige vraag : hebben we een kaart nodig van het paradijs van Cantor ? Een vervelend antwoord : wat is 'nodig hebben' ? Een beter antwoord : indien het de rol van de wiskunde is, een instrument te leveren dat de mens in staat moet stellen te komen tot een zo volledig mogelijke beschrijving van de hem omringende wereld, dan is het antwoord neen. Ik besef dat deze uitspraak bij de lezer vraagtekens zal doen rijzen. Waarom houden wiskundigen dan zo wanhopig vast aan kaarten die ze niet nodig blijken te hebben ? Twee antwoorden : omdat het niet eenvoudig was aan te tonen dat je de kaart niet nodig had, en omdat het expliciet te kennen geeft af te zien van de veroveringsdrang. Wie het oneindige

uit de wiskunde weghaalt, wenst niet meer te spreken over een W-God die al dan niet een invulling van de M-God is.

Ik heb reeds gesproken over intuitionisten, constructivisten, en finitisten. Alle delen dezelfde basisgedachte : het oneindige als een bestaande entiteit heeft geen plaats in de wiskunde. Vooral de groep van de (stricte) finitisten wil deze opvatting het verst doordrijven : geen enkele verwijzing naar het oneindige is vereist in de wiskunde die we 'nodig hebben'. Deze ketterse opvatting — en, zelf een (strict) finitist zijnde, kan ik hier persoonlijk getuigenis van afleggen — vindt weinig genade in de ogen van de 'klassieke' wiskundige.<sup>18</sup> Zonder de metafoor al te veel geweld aan te doen, lijkt het erop dat men niet aanvaardt uit een paradijs, hoe slecht gekend ook, verdreven te worden. Het dictum van Hilbert leeft nog steeds voort.

Maar er is een tweede punt dat ik wens te benadrukken. Door de eliminatie van het oneindige uit de wiskunde, is men gedwongen meer aandacht te hebben voor datgene wat vanuit het goddelijk perspectief te verwaarlozen is : de mens. Anders gezegd, éénmaal de correspondentie tussen M-God en W-God (en daardoor ook tussen M-God en F-God) is weggefallen, door de eliminatie van de W-God, krijgt men onvermijdelijk aandacht voor het derde verzwegen element in het verhaal : de W-mens. Dit schepsel laat zich het best kenmerken door zijn fundamentele eindigheid waarvan hij zich voortdurend bewust is. Klinkt dit misschien weinig indrukwekkend, misschien zelfs banaal, de mogelijke gevolgtrekkingen zijn het niet. Ik neem één voorbeeld.

Zolang men een ideaal wezen als model voor zich houdt, heeft men geen andere keuze dan alle afwijkingen van dit ideaalbeeld als fouten, als vergissingen te beschouwen. Uit onderzoek in de psychologie van het menselijk redeneren is onderhand wel duidelijk gebleken dat systematische denkfouten en vergissingen het lot van de mens zijn.<sup>19</sup> Wat dus moet betekenen, dat een groot gedeelte van ons dagelijks gedrag alleen maar kan worden uitgelegd als foutief gedrag, als een vergissing. Maar laat men het ideaalbeeld weg, en bekijkt men de menselijke denkpatronen niet als zwakke afspiegelingen van dat ideaal, maar als gegevens op zich, dan wordt het zinvol de vraag te stellen : waarom deze denkpatronen ? Het beantwoorden van deze vraag, in afwezigheid van een ideaal, vereist dat men zoekt naar eigenschappen van de mens zelf. De eindigheid van het menselijk geheugen, de eindigheid van de menselijke denkkraft, zijn beperktheid in ruimte en tijd, zijn typische overwegingen die in de literatuur steeds terugkomen. Zou men blijven vasthouden aan de gedachte dat het niettemin denkfouten zijn en blijven, dan lijkt het erop dan men de menselijke eindigheid ook als een fout of als een vergissing dient te beschouwen. En, uiteraard, zolang we ons zien als naderend tot de W-God, is onze eindigheid een storende factor, een wansmakelijke vergissing. Het strict eindig of finitistisch standpunt transformeert vergissingen

of fouten in de menselijke aard tot een *bepaling* van wat de mens is. Onze eindigheid is geen defect, het is ons kwaliteitsmerk.

## VI. Besluit

Wie of wat de M-God is, is geen zaak van de wis- en natuurkunde. Dit is in één zin de onderliggende gedachte van deze tekst. De eliminatie van het oneindige uit de wiskunde en, bij uitbreiding, uit de natuurkunde, is een explicitering van deze opvatting. Indien er sprake is van een 'nieuw verbond' (*une nouvelle alliance*, zoals Prigogine het zo graag uitdrukt) dan is het misschien toch verstandig dat beide partijen in het verbond eerst over de eigen identiteit nadenken. Indien de gedachtengang van dit essay enigszins steek houdt, dan is er nooit sprake geweest van een breuk : er is altijd een verbond geweest dat in de nieuwe wetenschapsopvatting à la Prigogine en Bodifée een nieuwe invulling krijgt. Beter ware het dus te spreken van een 'verbond nieuwe stijl'.

Ik heb gesproken over de M-God/M-oneindige, de W-God/W-oneindige en de F-God/F-oneindige. Eénmaal, in het laatste deel, is de W-mens/W-eindige ter sprake gekomen. Indien ik in vorige paragraaf sprak over het bepalen van de eigen identiteit, dan moeten we de lijst volledig maken en ons dringend de vraag stellen : wat met de M-mens/M-eindige ?

## Noten

\*Deze tekst is het rechtstreeks gevolg van twee gebeurtenissen. In de eerste plaats de uitnodiging van de Gentse Kultuurvereniging om een voordracht over dit onderwerp te houden (met dank aan de voorzitter, Jacques De Visscher). In de tweede plaats een voordracht aan de Vrije Universiteit Brussel gehouden door Julia Watkin over *Kierkegaard's God and Hawking's Universe*. Haar benadering liet mij overtuigend zien dat wat God en het goddelijke is, zoveel te maken heeft met natuurkunde als mijn doodsangst met mijn schoenveter.

<sup>1</sup>Priemgetallen zijn natuurlijke getallen met de eigenschap dat ze slechts door zichzelf en door 1 deelbaar zijn. Bijvoorbeeld : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... De precieze formulering van Euclides luidt : Er zijn meer priemgetallen dan in een vooraf bepaalde veelheid priemgetallen (Boek IX, propositie 20). Anders gezegd : gegeven een eindige verzameling priemgetallen, is er steeds een priemgetal te vinden dat niet tot die verzameling behoort.

<sup>2</sup>Voor een meer uitgebreide behandeling van de paradoxen van Zeno, zie Grünbaum en Salmon.

<sup>3</sup>Het probleem met oneindig kleine grootheden is eenvoudig te illustreren. Stel  $\delta$  is oneindig klein en  $n$  is een 'gewoon' getal. Dan kan  $n+\delta$  niet verschillend zijn van  $n$  want ik heb er slechts een oneindig klein iets bijgeteld. Dus  $(n+\delta) - n = 0$ . Wat betekent dat

$\delta = 0$ . Maar hoe kan dan een getal uit oneindig kleine getallen opgebouwd zijn? Immers 0 maal gelijk welk getal blijft nul. De 'truc' bestond erin  $\delta$  soms gelijk nul te nemen, en soms niet. 'Geesten van verdwenen entiteiten' die men kan oproepen indien nodig.

<sup>4</sup>Ik zal, naargelang de context, ook spreken van W-God, F-God en M-God in volledige overeenkomst met W-oneindig, F-oneindig en M-oneindig. Ik introduceer deze termen om zo dicht mogelijk de gepersonificeerde versie van Laplace te volgen.

<sup>5</sup>Anders gezegd, het is niet meer toegelaten om uit het feit dat A een deel is van B te besluiten dat B meer elementen bevat dan A. Dit geldt alleen maar voor eindige verzamelingen. In de redenering van Galileï vervalt dus stap (a).

<sup>6</sup>Blijkbaar waren deze resultaten zo verrassend voor de tijdgenoten van Cantor dat zij in eerste instantie een afwijzende houding aannamen. Vooral Leopold Kronecker werd één van zijn geduchtste tegenstanders. Ik durf de hypothese naar voor schuiven dat het te expliciete theologische karakter van Cantors onderzoeken wiskundigen afschrok. In de geest van deze tekst: Veroveringen zijn een goede zaak, maar het is niet nodig dit van de daken te schreeuwen.

<sup>7</sup>Zie Hilbert, blz. 376.

<sup>8</sup>Zie J.W. Dauben voor een uitgebreide en zeer gedetailleerde discussie van het werk van Cantor.

<sup>9</sup>Zie Van Dalen, Moore en Kline voor een meer uitgebreide discussie van deze problematiek.

<sup>10</sup>Voor een toegankelijke uiteenzetting van de resultaten van Gödel, zie Batens en Nagel & Newman.

<sup>11</sup>Zie Penrose voor de implicaties naar de natuurkunde toe.

<sup>12</sup>Voor een overzicht van deze diverse benaderingen zie Van Bendegem, 1989. Voor het finitisme in het bijzonder, zie Welti.

<sup>13</sup>Zie Bishop, blz. 2. Ik mag hieraan toevoegen dat Bishop geen marginaal is binnen de wiskundige gemeenschap. Het gaat hier dus zeker niet om het standpunt van een 'excentriekeling' dat niet als representatief mag worden beschouwd. Zie Rosenblatt voor een weergave van de impact van en de waardering voor het werk van deze filosoof-wiskundige.

<sup>14</sup>Dit is inderdaad niet het belangrijkste in de context van dit essay. De problematiek op zich is echter van fundamenteel filosofisch belang. De reductionistische visie houdt onder andere in dat de uitspraak 'Ik voel me niet zo goed vandaag' volledig kan vertaald worden in een fysieke uitdrukking waarin alleen maar sprake is van quarks, leptonen, fotonen, gluonen, ... Voor een zeer uitvoerige en diepgaande discussie van het reductionisme, zie Callebaut.

<sup>15</sup>Het boek van Barrow en Tipler is op het ogenblik het meest volledige overzicht van de problematiek van het antropisch principe.

<sup>16</sup>Het *argument by design* werd voor het eerst duidelijk en helder geformuleerd door William Paley in zijn *Natural Theology* (1802). Zie Dawkins voor een discussie van dit argument vanuit de moderne evolutionaire theorie.

<sup>17</sup>Penrose geeft duidelijk aan dat de resultaten van Gödel beperkingen opleggen aan wat in de wiskunde bewijsbaar is. Dit hoeft echter niet uit te sluiten dat de mens op een andere manier — wiskundige intuïtie in het geval van Penrose — tot wiskundige kennis

toegang kan hebben. Zoals het een degelijk platonist past, zien we bij Penrose een terugkeer tot de herinneringsleer van Socrates.

<sup>18</sup>Een steeds terugkerend element in de kritiek van de 'klassieke' wiskundige betreft de onmogelijkheid een wiskunde op te bouwen die zowel strict eindig is, als voldoende rijk om bijvoorbeeld in de natuurkunde bruikbaar te zijn. Dit argument is niet (langer) correct. Ik mag verwijzen naar het werk van Mortensen, Van Bendegem, 1992 en voor vroegere (terecht bekritiseerbare) pogingen naar het reeds aangehaalde werk van Welti.

<sup>19</sup>Zie het werk van Arkes & Hammond, Baron, Evans, Kahneman et al.

## Bibliografie

- Hal R. Arkes en Kenneth R. Hammond (eds.), *Judgment and Decision Making. An Interdisciplinary Reader*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986.
- Jonathan Baron, *Thinking and Deciding*, Cambridge, Cambridge University Press, 1988.
- John D. Barrow en Frank J. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford, Oxford University, 1986.
- Diderik Batens, *Kurt Gödel en de wetenschappelijke zekerheid*, in : J. Kint (red.) *Nieuwe visies in de wetenschap*, Leuven, Acco, 1989, blz. 43-66.
- Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967.
- Gerard Bodifée, *Het vreemde van de aarde*, Kapellen, DNB/Pelckmans, 1988.
- Gerard Bodifée, *Ruimte voor vrijheid*, Kapellen, DNB/Pelckmans, 1988.
- Gerard Bodifée, *Reflecties*, Kapellen, DNB/Pelckmans, 1989.
- Carl B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, Dover, 1959 (1949).
- Werner Callebaut, *Bijdrage tot een algemene rationaliteitstheorie op evolutionaire grondslag, met een toepassing op de organisatie van wetenschappelijke kennis*, doctoraatsverhandeling, Gent, 1983.
- Fritjof Capra, *The Turning Point*, Toronto, Bantam Books, 1983.
- Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, Harvard, Harvard University Press, 1979.
- Paul C.W. Davies, *The Accidental Universe*, Cambridge, Cambridge University Press, 1982.
- Paul C.W. Davies, *God and the new Physics*, New York, Simon and Schuster, 1983.
- Richard Dawkins, *The Blind Watchmaker*, Harlow, Essex, Longman Scientific & Technical, 1986.
- E.J. Dijksterhuis, *De mechanisering van het wereldbeeld*, Amsterdam, Meulenhoff, 1950, 1985<sup>5</sup>.
- Jonathan St. B.T. Evans, *Bias in Human Reasoning. Causes and Consequences*, Hove & Londen, LEA, 1989.
- Maarten Franssen, *Archimedes in bad. Mythen en sagen uit de geschiedenis van de wetenschap*, Amsterdam, Prometheus, 1990.
- Adolf Grünbaum, *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, Londen, George Allen and Unwin, 1967.



- Stephen W. Hawking, *A brief History of Time. From the Big Bang to Black Holes*, New York, Bantam Books, 1988.
- David Hilbert, *On the infinite*, in : Jean Van Heijenoort, (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic 1879-1931*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967, blz. 367-392.
- Daniel Kahneman, Paul Slovic en Amos Tversky, *Judgment under uncertainty : Heuristics and Biases*, Cambridge, Cambridge University Press, 1982.
- Morris Kline, *Mathematics. The Loss of Certainty*, Oxford, Oxford University Press, 1980.
- Pierre-Simon Laplace. *Essai philosophique sur les probabilités*, Parijs, Christian Bourgois, 1986. (Heruitgave van de vijfde editie van 1825).
- A.W. Moore, *The Infinite*, Londen, Routledge, 1990.
- Chris Mortensen, *Inconsistent Number Systems*, in : *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 29, 1, 1988, blz. 45-60.
- Chris Mortensen, *Models for Inconsistent and Incomplete Differential Calculus*, in : *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31, 2, 1990, blz. 274-285.
- E. Nagel en J.R. Newman, *De stelling van Gödel*, Utrecht, Aula, Het Spectrum, 1975.
- Roger Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford, Oxford University Press, 1989.
- Ilya Prigogine & Isabelle Stengers, *La Nouvelle Alliance. Métamorphose de la Science*, Paris, Gallimard, 1979.
- Ilya Prigogine & Isabelle Stengers, *Entre le Temps et l'Eternité*, Paris, Fayard, 1988.
- Murray Rosenblatt (ed.), *Errett Bishop : Reflections on Him and His Research*, Rhode Island, AMS, Providence, 1985.
- Wesley C. Salmon (ed.), *Zeno's Paradoxes*, New York, Bobbs-Merrill, 1970.
- D.J. Struik, *Geschiedenis van de wiskunde*, Amsterdam, SUA, 1977.
- Stephen Toulmin, *Kosmopolis. Verborgen agenda van de Moderne Tijd*, Kampen, Kok Agora, Kapellen, DNB/Pelckmans, 1990.
- Jean Paul Van Bendegem, *Finite, Empirical Mathematics : Outline of a Model*, Gent, Werken uitgegeven door de Faculteit Letteren en Wijsbegeerte, R.U.Gent, volume 174, 1987.
- Jean Paul Van Bendegem, *Foundations of Mathematics or Mathematical Practice : Is One Forced to Choose ?*, in : *Philosophica* 43, 1989, blz. 197-213.
- Jean Paul Van Bendegem, *Strict, Yet Rich Finitism*, in : *Proceedings of the First International Gödel Symposium*, New York, Pergamon Press, te verschijnen 1992.
- Dirk Van Dalen, *Filosofische grondslagen van de wiskunde*, Assen, Van Gorcum, 1978.
- Jan Van Der Veken, *Een kosmos om in te leven*, Kapellen, DNB/Pelckmans, 1990.
- Steven Weinberg, *The First Three Minutes*, Londen, Andre Deutsch, 1977.
- Ernst Welti, *Die Philosophie des strikten Finitismus. Entwicklungstheoretische und mathematische Untersuchungen über Unendlichkeitsbegriffe in Ideengeschichte und heutiger Mathematik*, Bern, Peter Lang, 1987.
- Max Wildiers, *Kosmologie in de Westerse cultuur*, Kapellen, DNB/Pelckmans, 1988.